OLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS

SUR

PPROXIMATION DES FONCTIONS

D'UNE VARIABLE RÉELLE

PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR

C. DE LA VALLÉE POUSSIN
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1919

PRÉFACE.

Quand on se propose d'exprimer une fonction d'une variable réelle sous forme finie, on s'aperçoit rapidement que l'ordre de la meilleure approximation possible est lié à la continuité et aux propriétés différentielles de la fonction, ou, si la fonction est analytique, à la nature et à la situation des points singuliers. C'est l'étude de cette dépendance réciproque qui fait l'objet du présent Volume. J'ai largement profité des recherches faites récemment sur cette question, mais je ne les expose pas. Je traite le sujet en toute liberté et sous la forme synthétique qui m'a paru la meilleure.

Sauf l'addition du Chapitre IX et quelques retouches de détail par ailleurs, ce Livre est la reproduction fidèle des leçons que j'ai eu l'honneur de faire à la Sorbonne en mai et juin 1918. Aussi ai-je contracté une dette de reconnaissance envers MM. les professeurs de la Faculté des Sciences de Paris. Ils ont bien voulu m'accueillir et m'encourager aux jours sombres. L'hospitalité qu'ils m'ont donnée est un honneur dont je m'enorgueillis encore aux jours victorieux. Je leur adresse ici tous mes remercîments. Puisse ce modeste Volume, fait un peu sous leur inspiration, leur porter le témoignage de ma gratitude.

Je remercie, en particulier, M. E. Borel. C'est la deuxième fois qu'il accepte une monographie signée de mon nom dans

la Collection remarquable qu'il dirige. Je ne pouva
souhaiter de recommandation plus flatteuse.

Je remercie enfin bien sincèrement la maison Gau
Villars et Cie, qui, malgré les sérieuses difficultés de l
présente, a entrepris la publication de cet Ouvrage e
donné tous les soins.

C. DE LA VALLÉE POUSSI

Louvain, juillet 1919.

APPROXIMATION DES FONCTIONS

INTRODUCTION.

THÉORÈMES DE WEIERSTRASS. GÉNÉRALITÉS.

1. **Problème de l'approximation.** — La question qui va nous occuper dans ces *Leçons* est la suivante : soit $f(x)$ une fonction continue d'une variable réelle x; il s'agit de l'exprimer sous forme finie avec une approximation plus ou moins grande, mais notre étude ne portera que sur deux modes de représentation approchée : *la représentation par polynomes*, et alors la fonction se fait dans un intervalle (a, b); *la représentation trigonométrique*, et alors la fonction $f(x)$ est supposée périodique de période 2π et la représentation s'étend à toutes les valeurs réelles de x.

Cette représentation trigonométrique est donnée par une expression d'un certain ordre fini n, c'est-à-dire par une somme limitée de la forme

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx, \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, par un polynome de degré n en $\sin x$ et $\cos x$. On sait, en effet, que les expressions

$$\cos kx, \qquad \frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$$

sont, pour k entier, des polynomes de degré k en $\cos x$. On s'en assure d'ailleurs immédiatement en considérant les formules de récurrence

$$\cos kx - \cos(k-2) = 2\cos(k-1)x\cos x,$$

$$\frac{\sin(k+1)x - \sin(k-1)x}{\sin x} = 2\cos kx.$$

En particulier, si l'expression trigonométrique d'o
paire, elle se réduit, les sinus disparaissant, à un po
degré n en $\cos x$.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a
pouvons nous donner un polynome de degré n, P_n
considérer comme une expression approchée de $f(x)$ d
valle (a, b). Nous dirons alors que la différence, p
négative,

$$f(x) - P_n(x),$$

est l'*écart* du polynome P_n au point x et que le maximum
de la valeur absolue de cet écart est l'*approximatio*
par P_n. Le polynome P_n est donc d'autant meilleu
polynome approché, qu'il fournit une approximation p
Si nous considérions une fonction périodique $f(x)$ et u
sentation trigonométrique approchée de cette fonction,
nirions l'approximation d'une manière analogue, sauf
envisagerions toutes les valeurs réelles de x; mais il s
cela de faire varier x dans une période, c'est-à-dire dans
valle d'amplitude 2π.

Le *problème de l'approximation* consiste à former un
sion de l'un des deux types précédents telle que l'appr
soit inférieure à un nombre positif donné d'avance, aussi
l'on veut. Ce problème est possible dans les deux cas.
deux théorèmes d'existence, tous deux dus à Weierstra
et qui ont été le point de départ de la théorie qui va nous
Voici les énoncés de ces théorèmes :

2. Théorèmes de Weierstrass (1). — I. *Toute fonc*
tinue dans un intervalle (a, b) peut être développée
uniformément convergente de polynomes dans cet in

II. *Toute fonction continue de période 2π peut ê*
loppée en série uniformément convergente d'expres
gonométriques finies.

---

(1) WEIERSTRASS, *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannt*
licher Functionen einer reellen Veränderlichen (*Sitzungsberichte d*
der Wiss., 1885).

Dans ces deux énoncés, il s'agit de développement en série et non d'approximation sous forme finie, mais les deux problèmes sont les mêmes. En effet, supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'approximation par polynomes. Si l'on connaît un développement de $f(x)$ en série uniformément convergente de polynomes, on en déduit un polynome aussi approché qu'on voudra de cette fonction, en sommant un nombre suffisant de termes de cette série. Réciproquement, si l'on a construit une suite de polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ fournissant une suite d'approximations tendant vers zéro, on obtient l'expression de $f(x)$ en série uniformément convergente :

$$f(x) = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \ldots.$$

Les théorèmes I et II se ramènent l'un à l'autre, comme nous le verrons. On en a donné aussi un grand nombre de démonstrations directes, dont nous ne ferons pas ici l'historique. Mais nous allons exposer maintenant la démonstration la plus élémentaire que l'on ait donnée jusqu'à présent du théorème I. Elle est due à M. Lebesgue (1).

3. Démonstration de M. H. Lebesgue. — La démonstration que M. H. Lebesgue a donnée du théorème I présente un caractère distinctif. Elle ramène la démonstration du théorème pour $f(x)$ quelconque, à la démonstration du théorème pour la fonction particulière $|x|$. Voici comment se fait cette réduction :

M. Lebesgue observe que l'on peut approcher autant que l'on veut d'une courbe continue à l'aide d'une ligne polygonale. L'approximation d'une fonction continue se ramène donc à celle de l'ordonnée d'une telle ligne. Il reste à ramener l'approximation d'une telle ordonnée à celle de $|x|$.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ les sommets d'une ligne polygonale dont il faut représenter approximativement l'ordonnée entre les abscisses x_1 et x_n. Remarquons que la fonction

$$\varphi_k(x) = |x - x_k| + (x - x_k)$$

(1) Sur l'approximation des fonctions (Bull. de la Soc. math., 2e série

est nulle pour $x \leq x_k$ et égale à $2(x - x_k)$ pour $x \geq x_k$.

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x),$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont n constantes à déterminer. C
varie linéairement entre deux abscisses consécutiv
Donc, pour l'identifier à la ligne polygonale, il suffit
coïncidence des n sommets, ou de poser les n conditio

$$y_i = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{i-1} a_k (x_i - x_k)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ceci constitue un système récurrent qui détermine de
proche $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Ainsi $F(x)$ est l'ordonnée de la ligne polygonale. O
mation de $F(x)$ dépend de celle de $\varphi_k(x)$, donc de celle d
donc finalement de celle de $|x|$ dans un certain interva

Il existe bien des méthodes d'approximation de $|x$
borne au seul théorème d'existence de Weierstrass, la
suffit et c'est encore celle de M. Lebesgue.

Soit donc à représenter $|x|$ en série uniformément c
de polynomes dans un intervalle (a, b). Le problème
que si a et b sont de signes contraires, et il suffit évid
considérer un intervalle symétrique, par exemple (
l'on pose alors $x = bt$ (b positif), il suffit de représent
l'intervalle $(-1; +1)$.

On a, par la formule du binome,

$$+\sqrt{1-\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2.4}\alpha^2 - \frac{1.3}{2.4.6}\alpha^3 - \ldots,$$

et cette série converge uniformément entre -1 et
plaçons α par $1 - t^2$; nous obtenons, dans l'intervalle
le développement cherché

$$|t| = 1 - \frac{1}{2}(1 - t^2) - \frac{1}{2.4}(1 - t^2)^2 - \ldots.$$

Cette démonstration ne va pas au delà du théorème d

éressante par sa simplicité, mais elle ne fournit ation médiocre. Elle se prêterait mal à la recherche s aussi convergentes que possible, recherche qui rincipaux Chapitres de ces *Leçons*.

tion du théorème II. — Un grand nombre de du théorème II se fondent sur les propriétés Fourier. Nous rencontrerons, au Chapitre II, ér. Il est cependant utile d'établir le théorème indépendamment de cette théorie, et c'est ce e a fait (1) en ramenant le théorème II au théo-

emonstration (2) qui s'inspire des mêmes idées . Lebesgue, mais qui en diffère par les artifices

onction continue de période 2π, dont il faut faire trigonométrique. Considérons les deux fonctions

$$x) + f(-x), \qquad [f(x) - f(-x)]\sin x.$$

, toutes deux paires de période 2π, sont donc des mes de $\cos x = u$ et nous pouvons les désigner u). Je dis que l'approximation trigonométrique t à celle par polynomes de $\varphi(u)$, de $\psi(u)$ et de ctions analogues.

et, $P(u)$ et $Q(u)$ deux polynomes tels que l'on ait ent

$$\varphi(u) = P(u), \qquad \psi(u) = Q(u);$$

même approximation,

$$[f(x) + f(-x)]\sin^2 x = P(\cos x)\sin^2 x,$$

$$f(x) - f(-x)]\sin^2 x = Q(\cos x)\sin x;$$

approchée

$$x)\sin^2 x = P(\cos x)\sin^2 x + Q(\cos x)\sin x.$$

Poussin, *L'approximation des fonctions d'une variable réelle* *mathématique*, 20e année, n° 1, 1918).

Recommençons le même calcul avec la fonction $f\left(x\right.$
de $f(x)$. Les polynomes $P(u)$ et $Q(u)$ sont remplac
autres $R(u)$ et $S(u)$; d'où la relation approchée

$$2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x = R(\cos x)\sin^2 x + S(\cos x)\sin$$

et, en changeant x en $x - \frac{\pi}{2}$,

(2) $$2f(x)\cos^2 x = R(\sin x)\cos^2 x - S(\sin x)\cos x$$

Ajoutons maintenant les relations approchées (1) et
à membre; nous obtenons l'expression trigonométr
chée de $f(x)$.

5. Réduction de l'approximation par polynomes à mation trigonométrique. — Nous venons de ra
M. Lebesgue, l'approximation trigonométrique à
mation par polynomes. On peut aussi faire l'inver
l'approximation par polynomes à une approximatio
trique. C'est ce procédé inverse que nous aurons surt
dans ces Leçons. A cet effet, nous ferons grand usage
extrêmement simple, dont M. S. Bernstein surtout
avantages ([1]) et dont il importe de dire un mot dès m

Soit à représenter par polynomes une fonction conti
un intervalle donné. Tout intervalle (a, b) se ramène
par la substitution linéaire

$$x = a\frac{1-t}{2} + b\frac{1+t}{2}.$$

Supposons qu'elle transforme $f(x)$ en $\varphi(t)$; la r
de $\varphi(t)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ se transform
de $f(x)$ dans (a, b) par la substitution linéaire inve
titutions transforment un polynome en un autre et n'
le degré. Il suffit donc bien de considérer la représ
fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. Posons, avec

$$x = \cos\varphi;$$

([1]) *Sur la meilleure approximation des fonctions continues*
par la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique

cette substitution transforme $f(x)$ en $f(\cos\varphi)$ qui est une fonction paire de période 2π. Je dis que *l'approximation de $f(x)$ par des polynomes en x et celle de $f(\cos\varphi)$ par des expressions trigonométriques en φ sont deux problèmes complètement équivalents.*

Supposons, en effet, que nous ayons, avec une certaine approximation, la représentation trigonométrique

$$f(\cos\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots + a_n \cos n\varphi,$$

ne contenant que des cosinus (puisque la fonction est paire), et remarquons que $\cos k\varphi$ est un polynome de degré k en $\cos\varphi$,

$$\cos k\varphi = \mathrm{P}_k(\cos\varphi);$$

nous avons, avec la même approximation, la représentation par polynome que nous cherchons

$$f(x) = a_0 + a_1 \mathrm{P}_1(x) + \ldots + a_n \mathrm{P}_n(x).$$

Les polynomes $\mathrm{P}_1(x)$, $\mathrm{P}_2(x)$, ... sont ce que M. Bernstein appelle des *polynomes trigonométriques*. Ils ont été considérés bien avant lui par le grand mathématicien russe Tchebycheff, qui en a signalé des propriétés remarquables, et nous aurons l'occasion d'y revenir dans la suite.

Réciproquement, une représentation de $f(x)$ par un polynome en x se transforme, en posant $x = \cos\varphi$, dans une représentation trigonométrique de $f(\cos\varphi)$.

6. **Module de continuité.** — Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Considérons deux points x_1, x_2 de cet intervalle et formons la différence absolue

$$|f(x_2) - f(x_1)|.$$

Cette différence admet un maximum pour l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) qui satisfont à la condition

$$|x_2 - x_1| \overline{\gtrless} \delta,$$

où δ est un nombre positif donné. Ce maximum est une fonction continue de δ, que nous désignerons par $\omega(\delta)$ et que nous appellerons *module de continuité* de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). On

pourrait préférer à cette dénomination celle de *modula-*
tion, plus naturelle à certains égards [1]; mais nous ch
première, parce qu'elle attire mieux l'attention sur l'
nous aurons à faire de la notion qu'elle exprime.

D'après sa définition, le module de continuité est
fonction continue et non décroissante de δ, qui tend
avec δ. C'est la rapidité plus ou moins grande de cet
gence quand δ tend vers zéro qui nous intéressera plus
rement dans la suite.

Quand $f(x)$ est périodique, le module de continuit
de la même façon, mais sans restriction d'intervalle. Da
ditions, $\omega(\delta)$ atteint évidemment son maximum pour
de δ égale ou inférieure à l'amplitude de la demi-périod
que ce maximum est $\omega(\pi)$.

Le module de continuité possède quelques propriét
presque immédiates :

1° *Quel que soit λ entier, on a*

$$\omega(\lambda\delta) \leqq \lambda\omega(\delta).$$

En effet, cette inégalité s'obtient en remplaçant cha
par la borne supérieure de son module, sous la conditio
dans l'égalité

$$f(x+\lambda h) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda-1} [f(x+kh+h) - f(x+kh$$

2° *Quel que soit λ positif (entier ou non)*, on a

$$\omega(\lambda\delta) < (\lambda+1)\omega(\delta).$$

Soit $\lambda + \varepsilon$ l'entier supérieur à λ (supposé non entier

$$\omega(\lambda\delta) \leqq \omega[(\lambda+\varepsilon)\delta] \leqq (\lambda+\varepsilon)\omega(\delta) < (\lambda+1)\omega(\delta)$$

3° *Si $\omega(\delta)$ s'annule pour une valeur non nulle δ_1*
se réduit à une constante.

En effet, $\omega(\delta)$ s'annule pour $\delta = \delta_1$, auquel cas, $f(x)$ e
dans tout intervalle $< \delta_1$, donc aussi dans tout intervall

(1) Cette observation m'a été faite par M. Lalesco.

7. Condition de Lipschitz. — On dit qu'une fonction est *lipschitzienne* ou vérifie une *condition de Lipschitz*, si l'on peut assigner une constante M telle que l'on ait, quels que soient x_1 et x_2,

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqq M\,|x_2-x_1|.$$

Si la fonction $f(x)$ est lipschitzienne, elle est continue et son module de continuité satisfait à la condition

$$\omega(\delta) \leqq M\delta,$$

complètement équivalente à la précédente.

Cette condition est celle de Lipschitz proprement dite. Plus généralement, on dit qu'une fonction $f(x)$ vérifie une condition de Lipschitz d'ordre α ou d'exposant α $(0 < \alpha \leqq 1)$, si l'on a

$$\omega(\delta) \leqq M\delta^\alpha.$$

Ainsi la condition de Lipschitz proprement dite est celle d'ordre 1.

Il n'y a pas lieu de considérer de condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 1$. Une fonction qui la posséderait se réduirait à une constante. On aurait, en effet, par la propriété 1° du numéro précédent, quel que soit λ entier,

$$\omega(\delta) = \omega\left(\lambda\frac{\delta}{\lambda}\right) \leqq \lambda\omega\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \leqq \lambda M\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^\alpha;$$

et, en faisant tendre λ vers l'infini,

$$\omega(\delta) \leqq \lim \frac{M\delta^\alpha}{\lambda^{\alpha-1}} = 0.$$

CHAPITRE I.

APPROXIMATION PAR LES SÉRIES DE FOURIE

8. Séries et constantes de Fourier. Propriété de m
les définit. — Soit $f(x)$ une fonction bornée et in
période 2π. Considérons la suite trigonométrique fin

$$S_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Cette suite s'appelle la *somme de Fourier d'ordr*
à $f(x)$, si les coefficients a_k et b_k sont déterminés par
de minimer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n]^2 \, dx.$$

Cette intégrale est une expression quadratique posit
admettant nécessairement un minimum. Pour le réa
annuler les dérivées partielles en a et en b, c'est-à-dir

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n] \cos kx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n] \,\mathrm{si}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

d'où, sans difficulté,

$$(1) \quad \begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \,\mathrm{si} \\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Il est important de remarquer que, par suite de la
l'intervalle d'intégration peut être remplacé par to
même amplitude 2π, sans changer la valeur de ces int

Les constantes a_k et b_k déterminées par les formules (1) sont les *constantes de Fourier* de $f(x)$. La série illimitée

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

considérée au point de vue purement formel, qu'elle soit convergente ou non, est la *série de Fourier de* $f(x)$. La somme S_n est celle des $n+1$ premiers termes de cette série.

L'expression des constantes de Fourier, sous forme d'intégrales définies par les formules (1), conduit immédiatement à quelques conséquences fondamentales :

1° *Si le module de* $f(x)$ *ne surpasse pas* M, *celui des constantes de Fourier ne surpasse pas* 2M.

2° *Les constantes de Fourier de* $f+\varphi$ *sont les sommes des constantes de Fourier du même ordre de* f *et de* φ. *La série de Fourier de* $f+\varphi$ *est la somme terme à terme des séries de* f *et de* φ.

9. **Conséquences du théorème de Weierstrass.** — Le théorème II de Weierstrass (n° 2) entraîne d'autres propriétés également fondamentales des constantes et des sommes de Fourier. Indiquons-les :

1° *Si* $f(x)$ *de période* 2π *est continue, on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n]^2\, dx = 0.$$

En effet, d'après Weierstrass, on peut définir une expression trigonométrique T_n, d'ordre n et donnant une approximation ρ_n qui tend vers zéro avec $1 : n$. Donc, puisque S_n minime l'intégrale, on a

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2\, dx < \int_0^{2\pi} (f - T_n)^2\, dx < \int_0^{2\pi} \rho_n^2\, dx.$$

Le dernier membre de ces inégalités tend vers zéro avec $1 : n$, donc *a fortiori* le premier.

2° *Si $f(x)$ est continue, la série positive*

$$\sum_0^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

est convergente et a pour somme

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx.$$

En effet, faisons la décomposition

$$\int_0^{2\pi} [f - S_n]^2\,dx = \int_0^{2\pi} f^2\,dx - 2\int_0^{2\pi} f S_n\,dx + \int_0^{2\pi}$$

On a, par les formules (1),

$$\int_0^{2\pi} f S_n\,dx = \sum_0^{n} \int_0^{2\pi} f(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,dx = \pi \sum_0^{n}$$

D'autre part, on a, en développant S_n,

$$\int_0^{2\pi} S_n^2\,dx = \sum_0^{n} \int_0^{2\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2\,dx = \pi \sum_0^{n} ($$

Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2\,dx = \int_0^{2\pi} f^2\,dx - \pi \sum_0^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

Quand n tend vers l'infini, le premier membre tend (par 1°), donc le second membre aussi, ce qui prouve sition.

On remarquera que l'on tire maintenant de la dernièr

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2\,dx = \pi \sum_{n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

3° *Si les constantes de Fourier d'une fonction sont toutes nulles, la fonction est identiquement nul*

En effet, on a, par la propriété 2°,

$$\int_0^{2\pi} f^2\,dx = 0,$$

ce qui n'a lieu pour f continue que si $f = 0$.

Cette proposition entraîne immédiatement la suivante :

4° *Deux fonctions continues qui ont les mêmes constantes de Fourier sont identiques.*

5° *Si la série de Fourier d'une fonction continue f est uniformément convergente dans la période, donc, en particulier, si les séries positives $\Sigma|a_k|$ et $\Sigma|b_k|$ convergent, la série de Fourier a pour somme f.*

En effet, la somme de la série est une fonction continue et périodique φ. Comme la série est intégrable terme à terme, les constantes de Fourier de φ [qui se calculent par les formules (1)] sont les mêmes que celles de f; donc $f = \varphi$ (par 4°).

6° *Si une expression trigonométrique T_n d'ordre n fournit une approximation ρ_n, on a nécessairement*

$$\rho_n \geq \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n+1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)},$$

ce qui fournit une première borne inférieure de la meilleure approximation possible (¹).

En effet, puisque S_n minime l'intégrale, on a (2°)

$$\int_0^{2\pi}(f - T_n)^2\,dx \geq \int_0^{2\pi}(f - S_n)^2\,dx = \pi\sum_{n+1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2);$$

et, puisque T_n donne l'approximation ρ_n,

$$\int_0^{2\pi}(f - T_n)^2\,dx \leq \int_0^{2\pi}\rho_n^2\,dx = 2\pi\rho_n^2.$$

(¹) S. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 52) (*Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. IV, 1912). Nous avons rétabli le facteur $\frac{1}{2}$ qui manque ici sous le radical.

La comparaison des deux bornes ainsi obtenues ju
rème énoncé.

10. Dérivation des séries de Fourier. — *Si f d*
admet une dérivée d'ordre r bornée et intégrabl
Fourier de $f^{(r)}$ s'obtient en dérivant r fois terme
de f.

Il suffit de faire la preuve pour le premier ordre,
fier que la série dérivée

$$\sum_{1}^{\infty} k(-a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

est la série de Fourier de f', donc de vérifier que s
sont bien les constantes de Fourier A_0, A_k et B_k de f
On a, en intégrant par parties, et à cause de la pé

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'\,dx = \frac{1}{\pi}[f(2\pi) - f(0)] = 0,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'\cos kx\,dx = \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} f\sin kx\,dx$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'\sin kx\,dx = -\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} f\cos kx\,dx$$

La vérification est donc faite.

11. Théorème. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction cont*
intervalle fini (a, b); si λ tend vers l'infini d'
quelconque, on a

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,d$$

Il suffira de considérer la première intégrale. Pos

$$I = \int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx.$$

Substituons dans cette intégrale $x + \frac{\pi}{\lambda}$ à x et ajout

a précédente; il vient

$$\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \varphi\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos\lambda x\,dx$$

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left[\varphi(x) - \varphi\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right]\cos\lambda x\,dx$$

$$\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} \varphi(x)\cos\lambda x\,dx - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} \varphi\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos\lambda x\,dx.$$

trois intégrales tend vers zéro quand λ tend vers mière avec la fonction à intégrer et les deux der- nplitude de l'intervalle d'intégration.

précédent subsiste si $\varphi(x)$ admet un nombre ts de discontinuité, même sans supposer $\varphi(x)$ moyennant l'existence de l'intégrale

$$\int_a^b |\varphi|\,dx.$$

ettre que φ n'est discontinue qu'aux limites a et b, e décompose en plusieurs autres vérifiant cette con- quelque petit que soit ε positif donné, on peut se sitif assez petit pour que les deux intégrales :

$$\int_a^b |\varphi|\,dx, \quad \int_{a+\eta}^{b-\eta} |\varphi|\,dx$$

s de ε, auquel cas les deux suivantes :

$$\int_a^b \varphi\cos\lambda x\,dx, \quad \int_{a+\eta}^{b-\eta} \varphi\cos\lambda x\,dx$$

s de ε, quel que soit λ. Il suffit donc de démontrer r la seconde, dans laquelle φ est continue, ce qui précédent [1].

grandeur des constantes de Fourier. — 1° *Si la*

---

[1] a démontré que le théorème subsiste sous la seule condition e. (*Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 61).

fonction $f(x)$ de période 2π est continue et adm
de continuité $\omega(\delta)$, ses constantes de Fourier a_m e
vers zéro pour $m = \infty$ (en vertu du théorème p
l'on a

$$|a_m| \le \omega\left(\frac{\pi}{m}\right), \qquad |b_m| \le \omega\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Il suffira de faire la démonstration pour a_m.

Recommençons le calcul de la démonstration pré
aurons, par le changement de x en $x + \frac{\pi}{m}$ et san
limites (à cause de la périodicité),

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m}\right)$$

puis, en faisant la demi somme,

$$a_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{m}\right)\right]\cos mx$$

Donc, par le théorème de la moyenne,

$$|a_m| \le \frac{1}{2\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{m}\right)\int_0^{2\pi} dx = \omega\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

2° *Si $f(x)$ de période 2π possède une dérivée d*
celle-ci admette le module de continuité $\omega_r(\delta)$, o

$$|a_m| \le \frac{1}{m^r}\,\omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right), \qquad |b_m| \le \frac{1}{m^r}\,\omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

En effet, les constantes de Fourier de $f^{(r)}(x)$ sont
signe près (n° 10), $m^r a_m$ et $m^r b_m$. Or elles so
$\le \omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right)$, en vertu de la proposition 1°, d'où
actuelle.

Voici déjà quelques applications très simples de

Si la série positive $\Sigma(|a_m| + |b_m|)$ converge, la s
converge uniformément vers $f(x)$ (n° 9) et l'approx
par la somme de Fourier S_n est inférieure à

$$\sum_{n+1}^{\infty}(|a_m| + |b_m|)$$

admet une dérivée $f'(x)$ satisfaisant à une condition de
'ordre α, on a (par 1°)

$$\sum (|a_m| + |b_m|) \leqq 2 \sum \frac{1}{m} \omega\left(\frac{\pi}{m}\right) < M \sum \frac{1}{m^{1+\alpha}},$$

me constante convenable. Cette série est convergente,
rie de Fourier converge vers $f(x)$. Ce critérium rentre
es plus généraux que nous rencontrerons plus loin.
est indéfiniment dérivable, on a (par 2°), quel que
r,

$$\sum_{n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < M_r \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+1}} < \frac{M_r}{rn^r},$$

me constante par rapport à n. Donc, quand n tend vers
pproximation fournie par la somme S_n de Fourier est
petite d'ordre supérieur à toute puissance de $1 : n$.

**mation de la série de Fourier et de la série conjuguée
tégrales définies.** — Soit $f(x)$ une fonction bornée et
de période 2π. En même temps que la série de Fourier

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

de considérer celle qui s'en déduit par la permutation
ients a, b et le changement de signe de x. Cette nou-
que l'on appelle la *série conjuguée* de celle de Fourier,
suivante :

$$\sum_1^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

es d'ordre n de ces deux séries sont respectivement :

$$S_n = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$S'_n = \sum_1^{n} (b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Par la substitution des valeurs (1) des constantes de [...] sommes se transforment dans les intégrales

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_1^n \cos k(t-x)\right| f(t)\,dt,$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_1^n \sin k(t-x)\right| f(t)\,dt.$$

Changeons t en $t+x$, sans toucher aux limites [...] périodicité), il vient

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_1^n \cos kt\right| f(t+x)\,dt,$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_1^n \sin kt\right| f(t+x)\,dt.$$

L'intervalle d'intégration peut être remplacé par [...] même amplitude 2π, en particulier par $(-\pi, \pi)$ [...] intégrales entre $-\pi$ et zéro se ramènent à des intégr[...] et π, par le changement de t en $-t$, et il vient ainsi

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_1^n \cos kt\right| [f(x+t) + f(x-t)] \ldots$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sum_1^n \sin kt\right| [f(x+t) - f(x-t)] \ldots$$

Si l'on sépare le réel et l'imaginaire dans la relation

$$\frac{1}{2}+\sum_1^n e^{kti} = \frac{e^{(n+1)ti} \ldots}{e^{ti} \ldots} \ldots \text{[illegible]}$$

on obtient

Il vient, par la substitution de ces valeurs,

$$(4)\qquad S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt,$$

$$(5)\qquad S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)-f(x-t)]\,\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

La convergence de la série de Fourier et de sa conjuguée sont liées à la convergence des intégrales précédentes pour $n=\infty$. Nous renverrons aux Ouvrages classiques pour l'étude des critériums de convergence les plus généraux. Nous n'indiquerons ici que le plus important, qui est le suivant :

14. Critérium de convergence des séries précédentes. — *Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π. La série de Fourier de $f(x)$ et sa conjuguée seront toutes les deux convergentes au point x, si, ε positif étant donné, l'intégrale*

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt$$

a une valeur finie. Dans ce cas, la série de Fourier a pour somme $f(x)$ et sa conjuguée a pour somme l'intégrale (existant par hypothèse)

$$(6)\qquad f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+t)-f(x-t)]\cot\tfrac{1}{2}t\,dt.$$

En intégrant les deux membres de la formule (2) au numéro précédent, il vient

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt = 1;$$

donc, en multipliant cette relation par $f(x)$, puis en retranchant l'équation (4) du résultat, il vient

$$f(x)-S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [2f(x)-f(x+t)-f(x-t)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Pour établir la première partie du théorème, c'e…
série de Fourier converge vers $f(x)$, il faut mo…
intégrale tend vers zéro quand n tend vers l'infi…
conséquence du théorème général du nº 11, pou…
grale

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2\sin\frac{1}{2}t} \right| \ldots$$

existe. Reste seulement à démontrer cette existenc…

A cet effet, on observe que l'intégrale

$$\int_0^\alpha \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} \right| \ldots$$

existe par hypothèse. Or on n'altère pas cette con…
dant l'intégration de 0 à π (puisque f est continu…
pliant la fonction à intégrer par la fonction contin…

$$\frac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}.$$

On retrouve alors l'intégrale dont il faut prou…
Passons à la seconde partie du théorème.

L'existence de l'intégrale (6) se justifie par u…
tout pareil à celui que nous venons de faire. En r…
l'équation (5) de (6), on trouve

$$f_1(x) - S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\cos(\ldots$$

Pour prouver que la série conjuguée converg…
faut prouver que cette intégrale tend vers zéro q…
l'infini. Mais c'est encore une fois la conséquen…
du nº 11, parce que l'intégrale

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}t} \right| dt$$

existe, par la condition supposée dans l'énoncé du…

Il y a lieu d'observer que ladite condition a li…
où $f(x)$ a une dérivée finie. Elle a lieu partout, si…
condition de Lipschitz d'un ordre α si petit qu'il…

s pouvons maintenant établir les théorèmes concernant
ximation par les séries de Fourier.

Théorème I. — *On peut assigner* a priori *deux nombres
, et B jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ est une
n périodique et intégrable de module $< M$, les deux
s S_n et S'_n sont toutes deux de module inférieur à*

$$M(A \log n + B),$$

ue soit n entier positif.

ffit de démontrer que la condition peut se réaliser pour
e des deux sommes.

mençons par S_n. On a, par la formule (4),

$$| < \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \right| dt < M \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t} \right| dt$$

$$< M \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt < M \int_0^1 dt + M \int_1^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{dt}{t}$$

$$= M\left[1 + \log\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right] < M(1 + \log n + \log 2\pi).$$

ernière parenthèse est de la forme $A \log n + B$.

ons à S'_n. On a, par la formule (5),

$$< \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\cos \frac{1}{2} t - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \right| dt$$

$$\frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{n}{2} t \sin \frac{n+1}{2} t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \right| dt < \frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \right| dt.$$

intégrale est la même que l'autre, sauf que n est remplacé
t qu'il y a un facteur 2 en plus. Il suffira de doubler les
précédentes de A et de B.

facile d'abaisser les valeurs de A et de B fournies par les
qui précèdent, mais cela n'a pas actuellement d'intérêt.

Théorème II. — *Supposons $f(x)$ périodique et intégrable*

et désignons par R_n *la différence* $f(x) - S_n$. *(*
a priori *deux nombres fixes* A *et* B *tels que*
module $< \mathrm{M}$, *on ait, quel que soit* n,

$$|R_n| < M(A \log n + B).$$

Ce théorème n'est pas distinct du précédent. O

$$|R_n| \leq |f| + |S_n| < M + |S_n|.$$

Il suffit donc d'ajouter une unité à la valeur d
dessus.

M. Lebesgue [1] a déduit du théorème précé
quence de la plus haute importance. C'est une
qui donne une borne inférieure de la meilleur
d'ordre n quand on connaît le développement d
fonction à représenter. Voici cette règle :

17. Règle de M. Lebesgue. — *Si l'approxima*
une suite de Fourier d'ordre n *est égale à* $\varphi($
approximation trigonométrique du même ord
égale à

$$\frac{\varphi(n)}{A \log n + B},$$

où A *et* B *sont les deux nombres assignés d*
précédent.

Soient S_n la somme de Fourier donnant l'app
et T_n une seconde expression d'ordre n donnant l'a
Considérons la décomposition

$$f = (f - T_n) + T_n.$$

Soit Σ_n la somme de Fourier de $f - T_n$, nous e

$$S_n = \Sigma_n + T_n,$$
$$|f - S_n| = |(f - T_n) - \Sigma_n|.$$

Comme Σ_n est la somme de Fourier de f -

(1) *Sur les intégrales singulières* (*Ann. Fac. des Sc. de*
(2) *Voir* la première au nº 9 (6º).

ule $\leq \rho_n$, nous avons, par le théorème précédent,

$$|f - T_n| - \Sigma_n| \leq \rho_n(A \log n + B);$$

omme d'autre part $|f - S_n|$ atteint la valeur $\varphi(n)$, nous ns en conclure

$$\varphi(n) \leq \rho_n(A \log n + B).$$

 là résulte la borne inférieure assignée à ρ_n.

. **Théorème III.** — *On peut assigner* a priori *deux nombres s* A *et* B *jouissant de la propriété suivante : Si* $f(x)$ *de ode* 2π *admet une dérivée d'ordre* r *intégrable et de ule* $\leq M_r$, *on a*

$$|R_n| = |f(x) - S_n| \leq (A \log n + B)\frac{M_r}{n^r}.$$

pposons d'abord r pair et soit $r = 2q$.

 série de Fourier de $f^{(r)}(x)$ s'obtient en dérivant $r = 2q$ fois de $f(x)$, à savoir

$$f(x) = \sum_0^\infty A_k, \qquad A_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

elle converge par le critérium du n° 14. La série dérivée (qui être convergente ou non) sera

$$\sum_1^\infty B_k, \qquad B_k = (-1)^q k^r A_k.$$

Donc, en remplaçant A_k par sa valeur tirée de cette dernière nule, nous obtenons

$$R_n = \sum_{n+1}^\infty A_k = (-1)^q \sum_{n+1}^\infty \frac{B_k}{k^r}.$$

oit σ_k la somme d'ordre k de la série de Fourier de $f^{(r)}(x)$, de te que

$$B_k = \sigma_k - \sigma_{k-1};$$

ient

$$(-1)^q R_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{k^r} = -\frac{\sigma_n}{(n+1)^r} + \sum_{n+1}^\infty \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r}\right)\sigma_k.$$

Mais, en vertu du théorème I, on a

$$|\sigma_k| < M_r(A\log k + B);$$

il vient donc

$$\frac{|R_n|}{M_r} < \frac{A\log n + B}{(n+1)^r} + \sum_{n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r}\right)(A\log k + B)$$

$$= \frac{A\log n + 2B}{(n+1)^r} + A\sum_{n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r}\right)\log k.$$

La dernière somme (qui est multipliée par A) peut se m
sous la forme

$$\frac{\log(n+1)}{(n+1)^r} + \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^r}\log\frac{k+1}{k}$$

$$< \frac{\log(n+1)}{(n+1)^r} + \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^r} < \frac{\log(n+1)}{(n+1)^r} + \frac{1}{rn^r} < \frac{\log n \ldots}{n^r}$$

Il vient donc *a fortiori*

$$|R_n| < \frac{2A\log n + (2B+1)}{n^r}M_r.$$

C'est la relation à démontrer ; 2A et 2B + 1 sont deux nom
fixes que l'on peut désigner de nouveau par A et B.

Supposons, en second lieu, r impair et de la forme $2q +$
q peut être nul).

La série de Fourier de $f^{(r)}(x)$, qui s'obtient par $2q+1$ dé
tions, sera, dans ce cas ci,

$$\sum_{1}^{\infty} B_k, \qquad B_k = (-1)^q(a_k\sin kx - b_k\cos kx)k^r.$$

Donc la série conjuguée de la série de Fourier de $f^{(r)}(x)$

$$\sum_{1}^{\infty} B'_k, \qquad B'_k = (-1)^q k^r A_k.$$

En remplaçant A_k par sa valeur tirée de cette dernière form
nous obtenons

$$R_n = (-1)^q\sum_{n+1}^{\infty}\frac{B'_k}{k^r}.$$

La démonstration s'achève exactement comme dans le cas précédent. En effet, soit σ'_k la somme d'ordre k de la série $\Sigma B'_k$; on a

$$B'_k = \sigma'_k - \sigma'_{k-1}$$

et, en vertu du théorème I, la somme σ'_k satisfait (comme σ_k) à la condition

$$|\sigma'_k| < M_r(A \log k + B).$$

Il n'y a donc qu'à accentuer σ dans la démonstration précédente.

Le théorème que nous venons d'établir rentre en partie dans un théorème de M. Bernstein ([1]) et celui de M. Bernstein est lui-même un cas particulier du théorème V qui suit. La considération de la série conjuguée, qui n'intervient pas dans l'analyse de M. Bernstein, permet de simplifier beaucoup les démonstrations.

Nous avons montré dans les deux théorèmes précédents comment l'approximation par les sommes de Fourier est liée au module maximum de la fonction ou de ses dérivés supposées existantes. Nous allons maintenant montrer comment l'approximation est liée au module de continuité des mêmes fonctions. Ce sera l'objet des deux théorèmes suivants.

19. **Théorème IV.** — *On peut assigner* a priori *deux nombres fixes* A *et* B *jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ de période 2π admet le module de continuité $\omega(\delta)$, on a*

$$|R_n| < (A \log n + B)\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Nous allons rattacher ce théorème aux théorèmes II et III par un procédé de raisonnement que M. Dunham Jackson a employé dans un cas analogue ([2]).

Soit δ une partie aliquote de la période 2π. Marquons, sur la courbe $y = f(x)$, les points d'ordonnée $\lambda\delta$, où λ parcourt la suite

---

([1]) *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (Mém. cité, n° 59). La démonstration de M. Bernstein concerne la représentation par polynomes trigonométriques et ne comporte pas que A et B soient des constantes absolues.

([2]) *Dissertation inaugurale*, Gottingen, 1911. Démonstration du théorème V (p. 40).

des valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Considérons
inscrit qui a ces points pour sommets; l'ordonnée de
est une fonction $\psi(x)$ de période 2π. Sur chaque c
gone, cette fonction est linéaire et son oscillation
Comme sa dérivée ψ' est constante sur chaque côt
chacun d'eux (et, par conséquent, partout),

$$|\psi'| \leq \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

D'autre part, sur le côté limité aux abscisses $\lambda\delta$
différence $f-\psi$, au point x, est comprise entre

$$f(x)-f(\lambda\delta) \quad \text{et} \quad f(x)-f(\lambda\delta+\delta);$$

on a donc aussi partout

$$|f-\psi| \leq \omega(\delta).$$

Considérons maintenant la décomposition

$$f=(f-\psi)+\psi.$$

La série de Fourier de f est la somme de celles de f
Soient R_n, R'_n, R''_n les écarts relatifs à ces trois séries,
ment; nous avons

$$R_n = R'_n + R''_n.$$

Mais, comme $|f-\psi| \leq \omega(\delta)$, nous avons, par le t

$$|R'_n| < (A \log n + B)\,\omega(\delta);$$

et, comme $|\psi'| \leq \frac{\omega(\delta)}{\delta}$, nous avons, par le théorème I

$$|R''_n| < (A \log n + B)\frac{\omega(\delta)}{n\delta}.$$

D'ailleurs, on peut satisfaire aux théorèmes II et
mêmes valeurs de A et de B; nous avons donc

$$|R_n| < (A \log n + B)\left(1+\frac{1}{n\delta}\right)\omega(\delta).$$

Prenons $\delta = \frac{\pi}{n}$, ce qui est bien une partie de la pé

obtenons

$$|R_n| < \left(1+\frac{1}{\pi}\right)(A \log n + B)\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

C'est le théorème à démontrer : les valeurs A et B de l'énoncé s'obtiennent en multipliant par $\left(1+\frac{1}{\pi}\right)$ celles de la démonstration.

20. Critérium de convergence de Dini-Lipschitz. — Ce critérium est un corollaire du théorème précédent. Il est plus précis que celui du n° 14. En voici l'énoncé :

Si le module de continuité de $f(x)$ satisfait à la condition dite de Dini-Lipschitz,

$$\lim_{\delta=0} \omega(\delta)\log\frac{1}{\delta} = 0,$$

la série de Fourier de $f(x)$ converge uniformément vers $f(x)$.

En effet, en faisant $\delta = \frac{\pi}{n}$, cette condition nous donne

$$\lim_{n=\infty} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log n = 0.$$

Dans ce cas, on a *uniformément*, par le théorème IV,

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

21. Théorème V. — *On peut assigner* a priori *deux nombres fixes A et B jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ de période 2π admet une dérivée d'ordre r et que celle-ci admette le module de continuité $\omega_r(\delta)$, on a*

$$|R_n| < (A \log n + B)\frac{\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^r}.$$

La démonstration est analogue à celle du théorème IV. Soit δ une partie aliquote de 2π. Inscrivons un polygone dans la courbe $y = f^{(r)}(x)$ en prenant pour sommets les points d'abscisses $\lambda\delta$ (λ entier). Soit $\psi(x)$ l'ordonnée de ce polygone ; nous avons, comme dans la démonstration rappelée,

$$|f^{(r)} - \psi| < \omega_r(\delta), \qquad |\psi'| < \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Considérons le développement de ψ en série de
vergente (n° 14)

$$\psi = \alpha_0 + \sum_1^\infty (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx);$$

nous avons, puisque $f^{(r-1)}$ est périodique,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\psi - f^{(r)})\, dx;$$

d'où, par le théorème de la moyenne,

$$|\alpha_0| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi - f^{(r)}|\, dx < \omega_r(\delta).$$

Désignons maintenant par $F(x)$ la somme de la
métrique obtenue en intégrant r fois de suite la série

$$\sum_1^\infty (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

sans introduire de constantes, de sorte que $F(x)$ est
périodique, dont les dérivées d'ordre r et d'ordre r
respectivement aux conditions

$$F^{(r)} = \psi - \alpha_0, \qquad F^{(r+1)} = \psi';$$

d'où, par les inégalités précédentes,

$$|(f - F)^{(r)}| \leq |f^{(r)} - \psi + \alpha_0| < 2\omega_r(\delta),$$
$$|F^{(r+1)}| = |\psi'| < \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Faisons maintenant la décomposition $f = (f$
soient R_n, R'_n, R''_n les restes des séries de Fourier de
respectivement; nous avons

$$R_n = R'_n + R''_n.$$

Mais $f - F$ admet une dérivée d'ordre r, de mo
donc, par le théorème IV,

$$|R'_n| < (A \log n + B)\frac{2\omega_r(\delta)}{n^r}.$$

D'autre part, F admet une dérivée d'ordre $r +$

$\overline{\overline{<}} \omega(\delta) : \delta$; par conséquent,

$$|R''_n| \overline{\overline{<}} (A \log n + B) \frac{1}{n^{r+1}} \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Nous en concluons

$$|R_n| \overline{\overline{<}} (A \log n + B) \left(2 + \frac{1}{n\delta}\right) \frac{\omega_r(\delta)}{n^r};$$

et, en faisant $\delta = \frac{\pi}{n}$,

$$|R_n| \overline{\overline{<}} \left(2 + \frac{1}{\pi}\right) (A \log n + B) \frac{\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^r}.$$

On obtient donc les valeurs de A et de B qui conviennent à l'énoncé, en multipliant par $\left(2 + \frac{1}{\pi}\right)$ celles utilisées dans la démonstration.

22. **Remarque.** — Supposons que $f(x)$ admette une dérivée continue d'ordre $r-1$ et que celle-ci satisfasse à une condition de Lipschitz d'ordre 1, à savoir

$$\omega_{r-1}(\delta) = M_r \delta.$$

On peut dire encore que $f(x)$ a une dérivée d'ordre r de module $\overline{\overline{<}} M_r$, sans supposer, pour cela, l'existence et l'intégrabilité de cette dérivée. On a, par le théorème précédent,

$$|R_n| \overline{\overline{<}} (A \log n + B) \pi \frac{M_r}{n^r}.$$

Le théorème III subsiste donc sans supposer la dérivée d'ordre r existante et intégrable. La distinction entre les deux cas disparaîtrait d'ailleurs si l'on faisait usage de l'intégrale de Lebesgue.

23. **Dérivabilité.** — La dérivée d'une somme S_n de Fourier est la somme de Fourier de la dérivée $f'(x)$ supposée bornée et intégrable. Donc les dérivées successives de la série de Fourier de $f(x)$ représentent les dérivées successives de $f(x)$ aussi longtemps que ces dérivées sont exprimables en série de Fourier, donc indéfiniment si toutes les dérivées existent. Ainsi *la série de Fourier d'une fonction indéfiniment dérivable est une représentation indéfiniment dérivable de cette fonction*, et la meilleure que l'on connaisse dans ce cas.

CHAPITRE II.

APPROXIMATION PAR LES SOMMES DE FEJÉR

14. Sommes de Fejér. — Les théorèmes précédents
ticulier le théorème III, ne donnent pas la démon
théorème de Weierstrass sur l'approximation trigonon
fonctions continues. Aucune démonstration de ce thé
plus élégante que celle de M. Fejér. Nous donneron
démonstration, la forme qui convient le mieux à notre

La méthode de M. Fejér consiste à sommer la séri
par le procédé de la moyenne arithmétique. Désigno
moyenne arithmétique des n premières sommes de
savoir

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}.$$

Cette moyenne est une expression trigonométrique d
au plus. Nous dirons que c'est la *somme de Fejér*
Elle revient à une intégrale, analogue à celle de Dirichl
appellerons *intégrale de Fejér* et que nous allons f
avons

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\frac{dt}{2\sin\frac{1}{2}t}\sum_0^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t$$

Cette sommation s'effectue par la formule

$$\sin\frac{t}{2}\sum_0^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \sum_0^{n-1}\frac{\cos kt - \cos(k+1)t}{2} = \frac{1}{}$$

d'où l'*intégrale de Fejér*

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\,\frac{1-\cos nt}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}\,dt.$$

nt $1 - \cos nt$ par $2 \sin^2 \frac{nt}{2}$, puis t par $2t$, elle prend la

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} f(x + 2t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

ns-lui un procédé de transformation que nous aurons
occasion d'utiliser plus tard. Substituons sous le signe
ion le développement

$$\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t + k\pi)^2};$$

terme à terme et observons que $f(x + 2t)\sin^2 nt$
période π; il vient, en prenant $t + k\pi$ comme nouvelle
dans chaque terme,

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2t) \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2 dt;$$

ngeant t en $\frac{t}{n}$,

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

expression définitive de l'intégrale de Fejér.
eu d'observer que, si $f = 1$, les sommes S_k et, par suite,
gales à l'unité; donc

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

opriétés fondamentales des sommes de Fejér. — Suppo-
le module de f ne surpasse pas M et appliquons à l'in-
Fejér le théorème de la moyenne; ceci est permis, parce
teur $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ est positif, ce qui n'avait pas lieu pour le
nalogue dans l'intégrale de Dirichlet. Il vient

$$|\sigma_n| < \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = M,$$

éorème suivant, qui est fondamental :

Toute somme de Fejér a une valeur intermédi
diverses valeurs de $f(x)$. En particulier, le m
somme de Fejér quelconque ne surpasse pas le m
mum de cette fonction.

Revenons maintenant à l'équation (2); multiplion
et soustrayons-la de l'équation (1). Il vient

$$\sigma_n - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{n}\right) - f(x)\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right.$$

Par conséquent, si f admet le module de continuité ω

$$(3) \qquad |f(x) - \sigma_n| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

Pour former une majorante de cette intégrale, partag
valle d'intégration en trois parties (0, 1), (1, N) et
majorant dans chaque intervalle, nous obtenons com
l'approximation

$$\frac{2}{\pi}\left[\omega\left(\frac{2}{n}\right) + \int_1^N \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^2} + \omega(\pi)\int_N^{\infty}\frac{dt}{t^2}\right]$$

et, en majorant davantage (n° 6, 2°),

$$\frac{2}{\pi}\left[\omega\left(\frac{2}{n}\right) + \omega\left(\frac{2}{n}\right)\int_1^N \frac{t+1}{t^2}\,dt + \frac{\omega(\pi)}{N}\right]$$
$$< \frac{2}{\pi}\left[\omega\left(\frac{2}{n}\right)(2 + \log N) + \frac{\omega(\pi)}{N}\right].$$

Prenant enfin $N = 1 : \omega\left(\frac{2}{n}\right)$, nous obtenons comme l
rieure de l'approximation

$$|f - \sigma_n| < \frac{2}{\pi}\,\omega\left(\frac{2}{n}\right)\left[2 - \log\omega\left(\frac{2}{n}\right) + \omega(\pi)\right].$$

Si f est continue, cette expression tend vers zéro qu
vers l'infini, et nous avons obtenu la démonstration an
théorème II de Weierstrass.

La borne de l'approximation qui précède présente peu
L'approximation est plus intéressante à considérer d

ù f vérifie une condition de Lipschitz d'ordre donné α

lans ce cas, une constante M qui dépend de f et satis-
lition

$$\omega(\delta) \leqq M\delta^{\alpha}.$$

3) nous donne, dans ce cas,

$$|f(x) - \sigma_n| \leqq \frac{2^{\alpha} M}{n^{\alpha}} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

ette intégrale existe et a une valeur purement numé-
pouvons énoncer le théorème suivant, qui est dû à
n (1) :

fait à la condition de Lipschitz d'ordre α :

$$\omega(\delta) \leqq M\delta^{\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

$$|f(x) - \sigma_n| \leqq \frac{AM}{n^{\alpha}},$$

e constante numérique qui peut être assignée une
utes quand α est donné.

ssion d'une somme trigonométrique finie au moyen
mes de Fejér. — Soit $T(x)$ une expression trigono-
rdre n. Désignons ses sommes de Fourier par $s_0, s_1, \ldots,$
sommes de Fejér par $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$. Les sommes
$_k$ deviennent identiques à T dès que l'indice k est $\geqq n$.

$$p)\tau_{n+p} = (s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}) + (s_n + \ldots + s_{n+p-1})$$

$$(n+p)\tau_{n+p} = n\tau_n + pT$$

on T d'ordre n s'exprime par la formule suivante :

$$T = \frac{(n+p)\tau_{n+p} - n\tau_n}{p}.$$

En particulier, ...

$$T = 2\tau_{2n} - \tau_n.$$

Nous allons faire une application de ces formules.

27. Nouvelle borne inférieure de la meilleure [...] **tion** (¹). — Considérons une fonction $f(x)$ et une [...] trigonométrique approchée d'ordre n, $T(x)$. Désigne[...] précédemment, par S_k et σ_k les sommes de Fourier [...] relatives à f, par s_k et τ_k les sommes analogues rel[...] par ρ l'approximation fournie par T, et proposons nou[...] une borne inférieure de ρ.

Nous avons, par définition,

$$|f - T| < \rho.$$

Observons que la somme de Fejér d'une différence [...] rence des sommes de Fejér, et appliquons la propriété [...] tale des sommes de Fejér (n° 25). Les sommes de Fejé[...] sont, avec $f - T$, de module $< \rho$; par conséquent,

$$|\sigma_n - \tau_n| < \rho, \qquad |\sigma_{n+p} - \tau_{n+p}| < \rho.$$

Nous avons donc, sauf une erreur $< \rho$,

$$T = f, \qquad \tau_n = \sigma_n, \qquad \tau_{n+p} = \sigma_{n+p}.$$

Substituons ces valeurs dans la relation du numéro pré[...]

$$T = \frac{(n+p)\sigma_{n+p} - n\sigma_n}{p} \quad \ldots;$$

l'erreur totale sera inférieure à

$$\rho + \frac{(n+p)\rho + n\rho}{p} = 2\frac{n+p}{p}\rho,$$

et, par conséquent, nous avons

$$\left| f - \frac{(n+p)\sigma_{n+p} - n\sigma_n}{p} \right| < 2\frac{n+p}{p}\rho.$$

(¹) De la Vallée Poussin, *Comptes rendus de l'Académie* [...] 21 mai 1918.

Revenons aux sommes de Fourier; il vient enfin

$$\left| f - \frac{S_n + S_{n+1} + \ldots + S_{n+p-1}}{p} \right| < 2\,\frac{n+p}{p}\,\rho.$$

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

La meilleure approximation ρ d'une fonction f par une expression trigonométrique d'ordre n n'est pas inférieure au quotient par $2\frac{n+p}{p}$ de l'approximation obtenue, quand on prend comme valeur approchée de f la moyenne arithmétique de p sommes de Fourier consécutives à partir de S_n. En particulier (si $p = n$), elle n'est pas inférieure au quart de celle qui est fournie par la moyenne de n sommes de Fourier consécutives à partir de S_n.

Cette règle peut se simplifier dans des cas particuliers.

Désignons par R_n l'erreur $f - S_n$, et par

$$A_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

le terme général de la série de Fourier de f. L'erreur relative à la moyenne est l'erreur moyenne, à savoir (si $p = n$)

$$\frac{R_n + R_{n+1} + \ldots + R_{2n-1}}{n} = \frac{A_{n+1} + 2A_{n+2} + \ldots + nA_{2n}}{n} + R_{2n},$$

et le maximum absolu de cette erreur est l'approximation fournie par la moyenne considérée.

Supposons, pour préciser, que f s'exprime en série de Fourier convergente et que la valeur de x qui maxime R_{2n} donne le même signe (donc celui de R_{2n}) à tous les termes A_k qui sont d'indices $> n$. Alors le maximum de l'erreur moyenne surpasse celui de $|R_{2n}|$ et nous avons la règle suivante :

Si f est développable en série de Fourier convergente, et que la valeur de x qui maxime R_{2n} donne le même signe à tous les termes de cette série d'indices $> n$, la meilleure approximation ρ de $f(x)$ par une expression trigonométrique d'ordre n ne sera pas inférieure au quart de celle fournie par la somme de Fourier d'ordre double, $2n$.

28. Ordre de la meilleure approximation de $|\sin$ **de Bernstein.** — Cette fonction est paire et de péri de Fourier ne contient donc que des cosinus de m de x. On a donc

$$|\sin x| = \sum a_{2k} \cos 2kx$$

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin x| \cos 2kx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(1+2k)x + \sin(1-2k)x]\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right].$$

Tous les termes sont maximés et négatifs (sauf a_0) valeur $x = 0$, et la dernière règle s'applique.

La meilleure approximation de $|\sin x|$ par un d'ordre n est inférieure à

$$\max|R_n| = \frac{2}{\pi}\sum_{k>\frac{n}{2}}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right] \Bigg\{ \begin{matrix} \frac{2}{\pi(n+1)} \\ \frac{2}{\pi n} \end{matrix}$$

mais elle est supérieure à

$$\frac{1}{4}\max|R_n| \qquad \frac{1}{2\pi(2n+1)}.$$

La meilleure approximation de $|\sin x|$ est donc d quand n tend vers l'infini.

La fonction $|\cos x|$ se ramène à la précédente par de x en $x + \frac{\pi}{2}$; elle admet donc la même approxima

L'approximation de $|x|$ en série de polynomes da $(-1, +1)$ revient à la précédente par la substitut Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qu a obtenu par des méthodes tout autres : *La meill mation de $|x|$ par un polynome d'ordre n dan* $(-1, +1)$ *est de l'ordre de $\frac{1}{n}$ quand n tend vers* question, que j'ai posée en 1908, a joué un rôle imp

développement de la théorie. La solution nouvelle que je viens d'en donner est la plus simple.

M. Bernstein a démontré le théorème précédent par deux méthodes différentes dans son Mémoire *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (1912) [1]. Il a beaucoup précisé les résultats dans un autre Mémoire *Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés* (1913) [2]. Dans celui-ci, il démontre que la valeur asymptotique de la meilleure approximation est la forme $\frac{A}{n}$ où A est une constante que l'on sait calculer au degré d'exactitude que l'on veut. Nous renverrons pour cela au Mémoire de M. Bernstein.

29. Dérivées des sommes de Fejér. — Comme la dérivée d'une somme de Fourier est la somme de Fourier de la dérivée, de même la dérivée d'une somme de Fejér, σ_n, de $f(x)$ est la somme de Fejér de $f'(x)$ supposée existante et bornée. Donc, *en tant qu'expression infiniment approchée pour $n=\infty$, la somme de Fejér est dérivable aussi longtemps que les dérivées successives de $f(x)$ admettent ce mode de représentation, donc aussi longtemps que ces dérivées sont continues.*

L'étude de la dérivation des sommes de Fejér conduit à des résultats intéressants. Nous allons d'abord exprimer σ'_n sous forme d'intégrale définie. Changeons t en $t-\frac{nx}{2}$ dans l'expression définitive de σ_n par une intégrale donnée au n° 24; il vient

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2t}{n}\right)\left[\frac{\sin\left(t-\frac{nx}{2}\right)}{t-\frac{nx}{2}}\right]^2 dt.$$

Or, si l'on dérive une fonction de $t-\frac{nx}{2}$, on a

$$D_x = -\frac{n}{2}D_t;$$

(1) *Mémoires publiés par la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. IV, 1912.

(2) *Acta Mathematica*, t. 37, 1913.

il vient donc, par la règle de Leibniz,

$$D\sigma_n = \sigma'_n = -\frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2t}{n}\right) D_t \left[\frac{\sin\left(t-\frac{nx}{2}\right)}{t-\frac{nx}{2}}\right.$$

$$= -\frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{2t}{n}\right) D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt;$$

et, en observant que la dérivée d'une fonction paire

$$\sigma'_n = -\frac{n}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{n}\right) - f\left(x-\frac{2t}{n}\right)\right] D\left(\right.$$

Désignons par $\Delta = \omega(\pi)$ l'oscillation de $f(x)$;
théorème de la moyenne,

$$|\sigma'_n| < \frac{n\Delta}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| dt = l\Delta n,$$

en désignant par l la constante numérique

$$l = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| dt.$$

Cette constante l est inférieure à $\frac{1}{4}$. En effet,
quand t varie de o à π et sa dérivée est négative
ailleurs

$$\left|D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| = \left|\frac{\sin 2t}{t^2} - \frac{2\sin^2 t}{t^3}\right| < \frac{1}{t^2}$$

par conséquent,

$$l < -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\infty}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right) dt$$

ce qui est $< \frac{1}{4}$. De là, le théorème suivant :

Si $f(x)$ a pour oscillation Δ, la dérivée d'u
Fejér quelconque, σ_n, de $f(x)$ est de module $< l$
constante numérique $< \frac{1}{4}$.

Ceci conduit à un autre résultat intéressant.
expression trigonométrique d'ordre n. Reprenons

au moyen de deux sommes de Fejér τ_n et τ_{2n} (nº 26)

$$T = 2\tau_{2n} - \tau_n,$$

d'où

$$T' = 2\tau'_{2n} - \tau'_n.$$

Supposons que T soit de module $\overline{\gtrless}$ L, donc d'oscillation $\Delta \overline{\gtrless} 2L$ et appliquons le théorème précédent. Nous voyons que τ'_{2n} et τ'_n sont respectivement de modules $\overline{\gtrless} 4\,ln\,L$ et $2\,ln\,L$. Donc : *Si une expression trigonométrique d'ordre n est de module* $<$ L, *sa dérivée est de module* $<$ *hn* L, *où h est une constante numérique.*

Toutefois ce procédé de raisonnement conduit à une valeur de h trop élevée. Le facteur h peut être abaissé à 1. C'est là un théorème très remarquable et très important, mais il se rattache à des considérations d'ordre algébrique. Nous allons le démontrer.

30. Théorème [1]. — *Soit* $T(x)$ *une expression trigonométrique d'ordre n. Si le module de* T *ne surpasse pas* L, *celui de sa dérivée* T' *ne surpasse pas* nL.

Nous allons établir trois propositions préliminaires :

1º *Une expression trigonométrique d'ordre* $\overline{\gtrless} n$, $T(x)$, *ne peut pas avoir plus de* $2n$ *racines non équivalentes, et s'il y a des racines multiples, elles comptent pour autant de racines simples qu'il y a d'unités dans leur ordre.*

Considérons la substitution

$$e^{ix} = t.$$

Elle fait correspondre à une même valeur de t une infinité de valeurs de x qui diffèrent d'un multiple de la période 2π et sont dites *équivalentes*. Deux valeurs de x qui correspondent à deux valeurs différentes de t ne satisfont pas à cette condition et sont *non équivalentes*. Soit

$$T = \sum_0^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx;$$

---

[1] C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 27 mai 1918.

on aura, par la substitution précédente,

$$T(x) = \frac{1}{2}\sum_{0}^{n}\left[\alpha_k\left(t^k + \frac{1}{t^k}\right) + \beta_k\frac{1}{i}\left(t^k - \frac{1}{t^k}\right)\right] = \frac{P_{2n}}{\ldots}$$

où P_{2n} est un polynome de degré $2n$. Or les racines d… données, avec leur ordre de multiplicité, par celle… nome $P_{2n}(t)$, ce qui justifie la proposition.

2° *Si la dérivée de* T *admet le même module m… que la dérivée de la fonction*

$$s = L\sin(nx + C),$$

où L *est une constante donnée et* C *une constante… on peut choisir* C *de manière que la différence… dérivées ait une racine double.*

Soit ξ un point où $|T'|$ atteint son maximum nL;… point, qui est un extrémé de T',

$$T'(\xi) = \pm nL, \qquad T''(\xi) = 0.$$

Déterminons C par la condition que $\cos(n\xi + C)$… le signe de $T'(\xi)$, nous aurons

$$s'(\xi) = \pm nL = T'(\xi), \qquad s''(\xi) = 0.$$

Alors ξ est une racine double de $s' - T'$, car on a

$$s'(\xi) - T'(\xi) = 0, \qquad s''(\xi) - T''(\xi) = 0.$$

3° *Si le module maximum* L' *de* T *ne surpa…* $s' - T'$ *admet au moins* $2n$ *racines distinctes et… lentes.*

Soit d'abord $L' < L$. Alors s donne son signe à la diff… aux $2n$ points non équivalents où $s = \pm L$. Soit

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{2n}, x_1 + 2\pi$$

la suite de $2n + 1$ de ces points embrassant une péri… rence $s - T$ est de signe alterné pour cette suite de po… $2n$ racines distinctes au moins, une dans chaque… deux points consécutifs x_k, x_{k+1}. Mais, entre deux raci…

il y en a une au moins de $s'-T'$, ce qui fait $2n$ racines distinctes de cette dérivée, qui, n'embrassant pas la période entière, sont non équivalentes.

Soit, en second lieu, $L'=L$. Donnons-nous un infiniment petit positif ε et considérons la différence

$$s-(1-\varepsilon)T.$$

Comme dans le cas précédent, cette fonction admet $2n$ racines non équivalentes, qui s'intercalent entre les termes de la suite (1). Ces racines forment une nouvelle suite

$$(2)\qquad \xi_1,\quad \xi_2,\quad \ldots,\quad \xi_k,\quad \ldots,\quad \xi_{2n},\quad \xi_1+2\pi,\qquad (x_k<\xi_k<x_{k+1}).$$

Mais ces racines ξ_k dépendent maintenant de ε et deux racines consécutives peuvent être infiniment voisines. Si l'intervalle (ξ_k, ξ_{k+1}) n'est pas infiniment petit, ξ_k et ξ_{k+1} sont, à la limite (pour $\varepsilon=0$), deux racines distinctes de $s-T$ (indépendant de ε) et, entre elles, il y a une racine au moins η_k de $s'-T'$ *à distance finie* de ξ_k et ξ_{k+1}. D'autre part, si l'intervalle (ξ_k, ξ_{k+1}) est infiniment petit et se confond, par conséquent, avec le point x_{k+1}, la racine intermédiaire de $s'-T'$ est $\eta_k=x_{k+1}$. Mais les deux intervalles (ξ_{k-1}, ξ_k) et (ξ_{k+1}, ξ_{k+2}), contigus au précédent, sont finis, car ils contiennent respectivement x_{k-1} et x_{k+1}, et η_k est isolé des deux racines voisines η_{k-1} et η_{k+1} par la conclusion obtenue dans la première hypothèse. Donc, à chaque intervalle (fini ou non) de deux ξ_k consécutifs, correspond une racine distincte de $s'-T'$ et la conclusion sur le nombre de ces racines subsiste.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant, dont celui du début est la conséquence immédiate :

Théorème. — *Soit* $T(x)$ *une expression trigonométrique entière dont le module ne surpasse pas* L, *si le module de sa dérivée atteint* nL, $T(x)$ *est de la forme*

$$s=L\sin(nx+C)$$

ou bien d'ordre $>n$.

Supposons d'abord que $|T'|$ dépasse nL. Déterminons la constante C comme dans la démonstration de (2°) et choisissons une constante $\lambda<1$ de manière que $|\lambda T'|$ ait pour maximum nL. Alors $|\lambda T|$ a son maximum $<L$, donc $s'-\lambda T'$ a $2n$ racines distinctes

(3°) et une racine double (2°), donc $2n+1$ racin
Cette expression (et, par conséquent, T) est d'ordre

Supposons que $|T'|$ ait pour maximum nL. Dans
a $2n+1$ racines (comme dans le cas précédent), n
identiquement nulle. Donc T est identique à s ou bien

Remarque. — Le théorème précédent a été
M. S. Bernstein, pour les fonctions T qui sont *p*
raisonnement d'ordre analytique [1]. Le même aut
pour le cas général, sauf l'introduction superflue d
mais la démonstration qu'il en donne est sujette à c

Le théorème précédent s'applique, de proche en
dérivée d'ordre quelconque. On obtient ainsi l'énc

Théorème. — *Si le module d'une expression trig*
d'ordre n ne surpasse pas L, *celui de sa dérivée*
surpasse pas n^kL.

---

(1) *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions*
M. Bernstein étend le théorème aux fonctions impaires par assim
cette assimilation que porte la critique que nous formulons ici.

CHAPITRE III.

MÉTHODE GÉNÉRALE PROPRE A ABAISSER LA BORNE PRÉCÉDEMMENT ASSIGNÉE A L'APPROXIMATION.

La borne assignée à l'approximation par les sommes de Fourier comporte, dans le cas général, un facteur $\log n$, que l'on peut se proposer de faire disparaître. Les sommes de Fejér ne le permettent pas. Elles ne présentent d'ailleurs d'avantage sur celles de Fourier que pour les fonctions non dérivables. Nous sommes ainsi amenés à introduire des intégrales analogues à celle de Fejér, mais plus rapidement convergentes. Ce sont les fonctions $F_r(x, n)$, que nous allons définir.

Toutefois, avant d'aller plus loin, il convient de rappeler que les premiers résultats analogues à ceux que nous allons établir, ont été obtenus par M. D. Jackson dans sa Thèse inaugurale [1]. M. Jackson traite pour commencer la représentation par polynomes et en déduit après coup les théorèmes relatifs à la représentation trigonométrique. C'est la marche inverse que nous adoptons ici. Nous préciserons un peu les conclusions tout en conservant aux calculs une apparence moins rébarbative.

31. Définition de $F_r(x, n)$. Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π. Donnons-nous deux entiers positifs r et n et posons

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} F_r(x, n) &= \frac{1}{\tau(r)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r} dt, \\ \tau(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r} dt. \end{aligned} \right.$$

[1] *Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen*, etc. Univ. Buchdruckerei, Göttingen, 1911

La fonction $F_r(x, n)$ peut être considérée comme une g
tion de l'intégrale de Fejér à laquelle elle se réduit si r

Nous allons démontrer le théorème suivant :

L'expression $F_r(x, n)$ *est une expression trigono en* x *d'ordre* $< rn$.

Changeons t en nt, F_r devient, à un facteur constant

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^{2r} dt.$$

Comme $f(x+2t)\sin^{2r} nt$ admet la période π, cette in
décompose dans la somme

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} f(x+2t)\left(\frac{\sin nt}{t+k\pi}\right)^{2r} dt$$

$$= \frac{1}{(2r-1)!}\int_0^{\pi} f(x+2t)\sin^{2r} nt\, D^{2r-2}\frac{1}{\sin^2 t}\, dt$$

Mais $\sin^{2r} nt\, D^{2r-2}\sin^{-2} t$ est une expression trigon
entière; elle est d'ordre $2(rn-1)$, car le premier fa
d'ordre $2rn$ et le second d'ordre -2; de plus, elle est p
période π, donc elle ne contient que des cosinus de
pairs de t. En définitive, F_r s'exprime linéairement
d'intégrales du type général

$$\int_0^{\pi} f(x+2t)\cos 2kt\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(u)\cos k(u-x)\, d$$

où $k \leq rn-1$, et qui sont des expressions trigonométri
d'ordre $< rn$.

32. Emploi de la fonction particulière $F_2(x, n)$. –
où $r=2$ est le premier qui se présente après celui de
de Fejér ($r=1$). Cette étude conduit à des résultats in

Calculons d'abord $\tau(2)$. On a, par le procédé de trans
employé plus haut et par une intégration par parties por
dérivée,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = \frac{1}{3!}\int_0^{\pi} \sin^4 t\, D^2\frac{1}{\sin^2 t}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \cos^2$$

donc $\tau(2) = \frac{2\pi}{3}$,

$$F_2(x, n) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt.$$

L'expression $F_2(x, n)$ est trigonométrique en x d'ordre $2n - 1$. Quand n tend vers l'infini, elle tend, comme l'intégrale F_1 de Fejér, vers $f(x)$ supposée continue. Mais on peut abaisser la borne assignée à l'approximation. C'est l'objet du théorème suivant :

33. **Théorème I** (¹). — *Si $f(x)$ de période 2π admet le module de continuité $\omega(\delta)$, $F_2(x, n)$ représente $f(x)$ avec une approximation*

$$\rho < A\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

où A est une constante numérique < 3.

Nous avons, en effet,

$$F_2 - f = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f(x)\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt;$$

et, en utilisant la propriété 2° du n° 6,

$$\left|f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f(x)\right| < \omega\left(\frac{2t}{n}\right) < \omega\left(\frac{1}{n}\right)(2|t| + 1);$$

par conséquent,

$$\rho < \omega\left(\frac{1}{n}\right)\frac{3}{\pi}\int_0^{\infty}(2t + 1)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = A\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

en posant

$$A = \frac{3}{\pi}\int_0^{\infty}(2t + 1)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = 1 + \frac{6}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^3}\, dt.$$

Enfin, en utilisant toujours le même mode de transformation, nous avons

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^3}\, dt < \int_0^{\infty}\left|\frac{\sin^3 t}{t^2}\right| dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 t}{\sin^2 t}\, dt = 1,$$

(¹) *Cf.* Dunham Jackson, *Dissertation inaugurale*, Satz VIII (p. 48).

34. Théorème II. — *Si $f(x)$ de période 2π adm*
continue et de module de continuité $\omega_1(\delta)$, $F_2($
sente $f(x)$ avec une approximation

$$\rho < A\,\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

où A est une constante numérique $< \frac{5}{2}$.

L'équation au début de la démonstration pré
s'écrire

$$F - f = \frac{3}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{n}\right)+f\left(x-\frac{2t}{n}\right)-2f(x)\right]$$

Mais on a

$$\left|f\left(x+\frac{2t}{n}\right)+f\left(x-\frac{2t}{n}\right)-2f(x)\right|$$
$$=\left|\frac{2}{n}\int_0^t\left[f'\left(x+\frac{2t}{n}\right)-f'\left(x-\frac{2t}{n}\right)\right]dt\right| < \frac{2}{n}\int_0$$
$$< \frac{2}{n}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^t (4t+1)\,dt = 2\,\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\,(2t^2+t)$$

par conséquent, par le théorème de la moyenne,

$$\rho < \frac{3}{2\pi}\,2\,\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\int_0^{\infty}(2t^2+t)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = A$$

en posant

$$A = \frac{3}{\pi}\int_0^{\infty}(2t^2+t)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt < \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt +$$

La dernière intégrale ayant été évaluée dans la
précédente, il vient

$$A < \frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) < \frac{5}{2}.$$

Le procédé ne s'étend pas au cas où $f(x)$ admet
d'ordre plus élevé. L'emploi d'une seule intégrale F,

mais il faut en combiner plusieurs entre elles. Dans cette combinaison, nous utiliserons un système d'équations linéaires que nous allons d'abord discuter.

35. **Sur un système linéaire.** — Soient $p_0, p_1, \ldots, p_\lambda$ des nombres donnés tous différents, et $a_0, a_1, \ldots, a_\lambda$ des inconnues à déterminer par le système de $\lambda+1$ équations linéaires

$$(1) \qquad \begin{cases} a_0 + a_1 + \ldots + a_\lambda = 1, \\ \dfrac{a_0}{p_0^\mu} + \dfrac{a_1}{p_1^\mu} + \ldots + \dfrac{a_\lambda}{p_\lambda^\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \lambda). \end{cases}$$

Ce système est bien déterminé, car son déterminant Δ a pour valeur

$$\Delta = \prod_{i>k} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_k}\right),$$

où le produit Π s'étend à toutes les différences dans lesquelles on a $i > k \geqq 0$. La valeur de a_0 sera

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta},$$

où Δ_0 est le déterminant qui se déduit de Δ en y remplaçant $\frac{1}{p_0}$ et ses puissances par o, de sorte que

$$\Delta_0 = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_\lambda} \prod_{i>k>0} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_k}\right).$$

Il vient ainsi

$$a_0 = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_\lambda} \frac{1}{\left(\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_0}\right)\left(\dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{p_0}\right)\ldots}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \dfrac{p_1}{p_0}\right)\left(1 - \dfrac{p_2}{p_0}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{p_\lambda}{p_0}\right)}$$

et les valeurs de $a_1, a_2, \ldots$ se déduisent de celle de a_0 par des permutations d'indices.

Nous aurons à utiliser le lemme suivant :

Si $p_0, p_1, \ldots, p_\lambda$ sont (dans un ordre arbitraire) les puissances $1, p, p^2, \ldots, p^\lambda$ d'un même nombre entier $p \geqq 4$, les valeurs des inconnues $a_0, a_1, \ldots$ sont toutes de module < 2.

Il suffit de prouver cela pour a_0 (la numérotatio
étant arbitraire). Dans l'expression finale de a_0, les
$\frac{p_2}{p_0}, \dots$ sont des puissances de p dont l'exposant e
négatif, mais non nul. Les facteurs du dénominate
différents de zéro, ceux où cet exposant est positif so
les autres figurent dans le produit infini

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\cdots = \frac{p-1}{p}\,\frac{p^2-1}{p^2}\cdots$$

On a, par conséquent,

$$|a_0| < \frac{p}{p-1}\,\frac{p^2}{p^2-1}\cdots = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)\left(1+\frac{1}{p^2-1}\right)\cdots$$

Cet exposant est égal à

$$\frac{1}{p-1}\left[1+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p^2+p+1}+\dots\right]$$
$$< \frac{1}{p-1}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots\right) = \frac{p}{(p-1)^2}$$

et, par conséquent,

$$|a_0| < e^{\frac{p}{(p-1)^2}} = e^{\frac{4}{9}}.$$

36. **Théorème III.** — *Si $f(x)$ de période 2π p*
dérivée d'ordre r, intégrable et de module $<$ M
définir une expression trigonométrique, $T(x)$, *d'o*

$$m = 2(\lambda+2)n,$$

où λ est le plus grand entier contenu dans $\frac{r+1}{2}$, et
sente $f(x)$ avec une approximation

$$< \psi(r)\frac{M_r}{n^r},$$

où $\psi(r)$ dépend de r seul et peut être assigné a priori

Déterminons un système de $\lambda+1$ constantes $a_0, a_1,$
les équations (1) du numéro précédent où $p_0, p_1, \dots$
puissances successives de 4. Je dis que l'on peut défini

rmule

$$T(x)=\sum_{k=0}^{\lambda} a_k F_{\lambda+2}(x, 2^k n).$$

ordre m de T est celui de $F_{\lambda+2}(x, 2^\lambda n)$, c'est-à-dire

$$(\lambda+2)2^\lambda n - 1,$$

ui est conforme à l'énoncé. Il reste à prouver que T donne roximation ρ assignée. Posons, en abrégé,

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\lambda} a_k f\left(x+\frac{2t}{2^k}\right);$$

onstantes a_k ont été déterminées par les conditions

$$\varphi(0)=f(x), \qquad \varphi^{(2s)}(0)=0, \qquad (s=1, 2, \ldots, \lambda),$$

reviennent respectivement aux $\lambda+1$ équations linéaires (1) uméro précédent. Nous avons maintenant

$$T(x)=\frac{1}{\tau(\lambda+2)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4} dt$$

omme $\varphi(0)=f(x)$,

$$T-f=\frac{1}{\tau(\lambda+2)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-\varphi(0)\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4} dt;$$

nfin

$$T-f=\frac{1}{\tau(\lambda+2)}\int_{0}^{\infty}F\left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4} dt,$$

osant, pour abréger,

$$F(t)=\varphi(t)+\varphi(-t)-2\varphi(0).$$

ous allons évaluer le maximum ρ de $|T-f|$ par le théorème moyenne. Remarquons que F et toutes ses dérivées d'ordre $< r$ nulent pour $t=0$, celles d'ordre impair parce que F est paire, elles d'ordre pair par les équations (2). Il vient donc, par la nule de Taylor,

$$\left|F\left(\frac{t}{n}\right)\right| < \frac{1}{r!}\left(\frac{t}{n}\right)^r \max.|F^{(r)}|.$$

Or la formule précédente montre que max. $|F^{(r)}|$ n
$2\,\text{max}.\,|\varphi^{(r)}|$; donc, les $|a_k|$ étant ≤ 2,

$$|F^{(r)}| \leq 2\sum_{k=0}^{\lambda}|a_k|\left(\frac{2}{2^k}\right)^r M_r \quad 4\cdot 2^r \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{1}{2^{kr}} M_r \quad 8$$

$$\left|F\left(\frac{t}{n}\right)\right| \quad \frac{8M_r}{r!}\left(\frac{2t}{n}\right)^r.$$

Substituons cette majorante dans la formule (3)

$$\rho \leq \frac{M_r}{n^r}\,\frac{2^r}{r!}\,\frac{8}{\tau(\lambda+2)}\int_0^{\infty} t^r\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4} dt$$

Cette formule prouve le théorème. On peut faire

$$\psi(r) = \frac{2^r}{r!}\,\frac{8}{\tau(\lambda+2)}\int_0^{\infty} t^r\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4} dt$$

Cette intégrale existe, car $2\lambda+4 \quad r+3$ si r est im
si r est pair.

Observons encore que l'on a

$$\tau(\lambda+2) \geq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r+3} dt \quad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{\operatorname{tang} t}\right)^{r+3} dt$$

$$\geq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{r+3}\,dt \quad \frac{(r \quad)\ldots}{(r \quad)\ldots} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin$$

$$\int_0^{\infty} t^r\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+4} dt \quad \int_0^{\infty} t^r\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r+2} dt \quad \int$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt \quad \int_0^{\pi}$$

Nous en concluons, r pouvant être supposé ≥ 2,

$$\psi(r) \quad \frac{2^r}{r!}\,\frac{(r\ldots 4)(r\ldots)}{(r\ldots 3)(r\ldots 1)} \ldots$$

Donc $\psi(r)$ décroît rapidement quand r augmente.

Le théorème III peut être présenté sous une f
mieux saisir la portée. Ce sera l'objet du théorème

37. **Théorème III** *bis*. — *Si $f(x)$ admet une de*

intégrable et de module $< M_r$, *alors, quel que soit* m *entier et positif*, $f(x)$ *est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre* $\overline{\gtrless} m$ *avec une approximation*

$$\rho < \psi_1(r) \frac{M_r}{m^r},$$

où ψ_1 *est une fonction de* r *seul qu'on peut assigner* a priori.

Nous pouvons, en vertu du théorème précédent, construire une expression T d'ordre $<(\lambda+2)2^\lambda n$ qui donne l'approximation

$$\rho < \psi(r) \frac{M_r}{n^r} = \psi(r) \left(\frac{m}{n}\right)^r \frac{M_r}{m^r}.$$

Prenons pour m le plus grand entier qui vérifie la condition

$$(\lambda+2)2^\lambda n < m;$$

nous aurons

$$m < (\lambda+2)2^\lambda(n+1), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{m}{n} < (\lambda+2)2^{\lambda+1},$$

$$\rho < \psi(r)(\lambda+2)^r 2^{r(\lambda+1)} \frac{M_r}{m^r},$$

ce qui prouve le théorème : on peut poser

$$\psi_1(r) = \psi(r)(\lambda+2)^r 2^{r(\lambda+1)}.$$

D'après l'approximation de ψ obtenue à la fin du numéro précédent, $\psi_1(r)$ augmente très rapidement avec r. Il serait utile de savoir si cette croissance de ψ_1 tient à la nature des choses ou si elle est imputable à l'imperfection du procédé d'approximation employé. Mais nous ne traiterons pas cette question.

38. **Théorème IV.** — *Si* $f(x)$ *admet une dérivée d'ordre* r *continue et de module de continuité* $\omega_r(\delta)$, *alors, quel que soit* m *entier positif*, $f(x)$ *est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre* $\overline{\gtrless} m$ *avec une approximation*

$$\rho < \psi_2(r) \frac{\omega_r\left(\dfrac{\pi}{m}\right)}{m^r},$$

où ψ_2 *est une fonction de* r *seul qui peut être assignée* a priori.

Ce théorème se déduit du précédent, par le raisonnement géné-

ralisé de D. Jackson qui permet de passer du théorè
rème IV dans la théorie des séries de Fourier. Soi
aliquote de 2π. Nous savons définir une fonction
aux conditions (n° 21)

$$|f^{(r)} - F^{(r)}| < 2\omega_r(\delta), \qquad |F^{(r+1)}| < \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Ainsi f est la somme de deux fonctions $f - F$ et
s'applique le théorème précédent, et qui sont susc
représentation d'ordre $\leq m$ avec les approximation

$$\rho_1 < \psi_1(r)\frac{2\omega_r(\delta)}{m^r}, \qquad \rho_2 < \psi_1(r+1)\frac{\omega_r(\delta)}{\delta m^{r+1}}$$

Donc f admet l'approximation $\rho < \rho_1 + \rho_2$, qui e
proposée en faisant $\delta = \frac{\pi}{m}$. On a

$$\psi_2(r) = 2\psi_1(r) + \frac{1}{\pi}\psi_1(r+1).$$

Ce théorème donne, comme cas particulier, le suiva

Théorème (¹). — *Si $f(x)$ admet une dérivée cont
qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ord
susceptible d'une représentation trigonométriqu
avec une approximation*

$$\rho < \frac{M}{m^{r+\alpha}},$$

où M *est une constante par rapport à* m.

En effet, on a, dans ce cas (M_1 constant),

$$\omega_r(\delta) < M_1\delta^\alpha.$$

On obtient donc l'inégalité précédente en posant

$$M = \psi_2(r)M_1\pi^\alpha.$$

(¹) *Cf.* D. Jackson, *Dissertation inaugurale*, Satz VII (p
considère toutefois que la condition de Lipschitz d'ordre 1.

CHAPITRE IV.

THÉORÈMES RÉCIPROQUES. PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES QUE SUPPOSE UN ORDRE DONNÉ D'APPROXIMATION.

Dans les Chapitres précédents, nous nous sommes donné les propriétés différentielles de $f(x)$ et nous en avons déduit la possibilité d'un certain ordre d'approximation. Nous allons maintenant traiter le problème inverse. Nous supposerons que la fonction $f(x)$ de période 2π est représentable avec une approximation d'un certain ordre et nous remonterons aux propriétés différentielles qui en résultent pour la fonction.

Voici le théorème fondamental :

39. **Théorème I.** — *Désignons par $\Omega(x)$ une fonction de x non croissante, au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de x, et qui tend vers zéro pour $x = \infty$. Alors, si la fonction $f(x)$ de période 2π peut être représentée, quel que soit n, par une expression trigonométrique d'ordre $\overline{\gtrless} n$ avec une approximation*

$$\rho_n \leqq \frac{\Omega(n)}{n^r}, \tag{1}$$

où r est un entier nul ou positif; et si l'intégrale à limite infinie

$$\int^{\infty} \Omega(x)\,\frac{dx}{x}$$

existe, $f(x)$ possède une dérivée continue d'ordre r et cette dérivée admet le module de continuité

$$\omega(\delta) \overline{\gtrless} h\left[\delta\int_a^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x)\,dx + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \Omega(x)\,\frac{dx}{x}\right], \tag{2}$$

où a et h sont des constantes convenables par rapport à δ.

Dans le cas où $r=0$, $\omega(\delta)$ désigne le module
de $f(x)$ lui-même.

Sous les conditions du théorème, $f(x)$ peut être
une série d'expressions trigonométriques u_n

$$f(x) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

dont le terme u_n (qui peut être nul) est d'ordre
reste

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

satisfait à la condition

$$|R_n| < 2\frac{\Omega(n)}{n^r}.$$

Donnons-nous un entier $a > 1$ tel que $\Omega(x)$ soit
pour $x > a$. Il suffit de prouver que la dérivée d'ord

$$R_{a^2}^{(r)}$$

existe et admet un module de continuité $\omega(\delta)$ qu
inégalité de la forme (2). En effet, il est clair que
de $f - R_{a^2}$ qui sont des expressions trigonomé
admettent un module de continuité vérifiant cet
pourvu que $\Omega(x)$ ne soit pas identiquement nulle,
pose évidemment. Faisons cette démonstration.

Posons

$$\varphi_k = R_{a^k} - R_{a^{k+1}},$$

nous aurons

$$R_{a^2} = \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_k + \dots$$

Mais φ_k est une expression trigonométrique d'ordre
dont le module ne surpasse pas les bornes assignées
Par conséquent, Ω étant non croissant,

$$|\varphi_k| < 2\frac{\Omega(a^k)}{a^{kr}}.$$

Alors, d'après le théorème connu (n° 30) sur l'ordre
des dérivées d'une expression trigonométrique d'
on a

$$|\varphi_k^{(r)}| < 2\frac{\Omega(a^k)}{a^{kr}}(a^{k+1})^r = 2a^r\Omega(a^k),$$

$$|\varphi_k^{(r+1)}| < 2\frac{\Omega(a^k)}{a^{kr}}(a^{k+1})^{r+1} = 2a^r a^{k+1}\Omega(a$$

ésulte de la première de ces deux inégalités que l'on a

$$R_{a^2}^{(r)} = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k^{(r)}$$

cette dérivée est continue, parce que la série dérivée ainsi ne est uniformément convergente. Nous allons, en effet, er que l'on peut en former une série majorante convergente. sidérons les termes à partir de $k = \mu + 1$; nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\mu+1}^{\infty} \max.|\varphi_k^{(r)}| &< 2a^r \sum_{\mu+1}^{\infty} \Omega(a^k) \\
&= 2a^{r+1} \sum_{\mu+1}^{\infty} \frac{\Omega(a^k)}{a^k} \, \frac{a^{k-1}(a-1)}{a-1} \\
&= \frac{2a^{r+1}}{a-1} \sum_{\mu+1}^{\infty} \frac{\Omega(a^k)}{a^k} (a^k - a^{k-1}) \\
&< \frac{2a^{r+1}}{a-1} \int_{a^\mu}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} \, dx.
\end{aligned}$$

la série majorante $2a^r \sum \Omega(a^k)$ écrite sur la première ligne nvergente.

ulons maintenant le module de continuité de cette dérivée. Δx un accroissement de x de module $< \delta$ et ΔR_{a^2}, $\Delta\varphi_k$ les ssements correspondants des fonctions. Nous avons

$$\Delta R_{a^2}^{(r)} = \sum_{k=2}^{\mu} \Delta\varphi_k^{(r)} + \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \Delta\varphi_k^{(r)}.$$

pliquons le théorème des accroissements finis à la première e. Nous avons

$$\omega(\delta) < \delta \sum_{k=2}^{\mu} \max.|\varphi_k^{(r+1)}| + 2 \sum_{\mu+1}^{\infty} \max.|\varphi_k^{(r)}|.$$

s avons déjà obtenu pour la seconde somme une intégrale

majorante. Faisons la même chose pour la prem

$$\sum_{k=2}^{\mu} \max.|\varphi_k^{(r+1)}| < 2a^{r+2}\sum_{2}^{\mu}\Omega(a^k)a^{k-1}$$

$$< \frac{2a^{r+2}}{a-1}\sum_{2}^{\mu}\Omega(a^k)a^k$$

$$< \frac{2a^{r+2}}{a-1}\int_a^{a^\mu}\Omega(x)\,dx.$$

Substituons dans la borne de $\omega(\delta)$ les deux
rantes; il vient

$$\omega(\delta) < \delta\,\frac{2a^{r+2}}{a-1}\int_a^{a^\mu}\Omega(x)\,dx + \frac{2a^{r+1}}{a-1}\int$$

Choisissons l'entier μ qui vérifie les conditions

$$a^{\mu-1} < \frac{1}{\delta} < a^\mu, \quad \text{d'où} \quad a^\mu < \frac{a}{\delta};$$

il vient

$$\omega(\delta) < \frac{2a^{r+2}}{a-1}\left|\,\delta\int_a^{\frac{a}{\delta}}\Omega(x)\,dx + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\Omega(x)\right.$$

ce qui est équivalent à la formule de l'énoncé.

40. Théorème II. — *Si, en plus des conditi précédent, on peut assigner une constante α fonction $x^\alpha\Omega(x)$ soit non décroissante à part déterminée a de x, alors $f^{(r)}(x)$ admet le mod*

$$\omega(\delta) < h'\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\Omega(x)\,\frac{dx}{x},$$

où h' est une constante par rapport à δ.

Il faut démontrer qu'il suffit de conserver le formule (2) et, pour cela, que ce second term ment petit par rapport au premier. Pour s'e

vérifier que le quotient de ces deux termes

$$\int_x^\infty \Omega(x)\,\frac{dx}{x} : \frac{1}{x}\int_a^{ax} \Omega(x)\,dx$$

ne tend pas vers zéro pour $x=\infty$.

C'est la conséquence du théorème de la moyenne. On en conclut, $x^\alpha\Omega(x)$ étant non décroissant,

$$\int_x^\infty \Omega(x)\,\frac{dx}{x} = \int_x^\infty x^\alpha\,\Omega(x)\,\frac{dx}{x^{1+\alpha}} > \frac{\Omega(x)}{\alpha},$$

$$\frac{1}{x}\int_a^{ax} \Omega(x)\,dx = \frac{1}{x}\int_a^{ax} x^\alpha\,\Omega(x)\,\frac{dx}{x^\alpha}$$

$$< \frac{(ax)^\alpha\,\Omega(ax)}{x}\,\frac{(ax)^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \frac{a\,\Omega(ax)}{1-\alpha}.$$

Donc $\Omega(x)$ étant non croissant et $a>1$, le quotient de ces deux termes est $> \frac{1-\alpha}{a\alpha}$.

Nous considérerons d'abord une application particulière du théorème précédent, qui fait apparaître sous une forme singulièrement précise la dépendance réciproque qui existe entre l'approximation et les propriétés différentielles de la fonction.

41. **Théorème III.** — *Si $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre r qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α ($0<\alpha<1$, limites exclues), alors, quel que soit n, $f(x)$ est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre $\leqq n$, avec une approximation*

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+\alpha}} \qquad (\text{M const.}).$$

Réciproquement, s'il est possible de satisfaire à cette condition quel que soit n, $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre r satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre α (¹).

(¹) M. Bernstein a seulement prouvé que f vérifie une condition d'ordre $<\alpha$. *Sur la meilleure approximation des fonctions continues* (nº 14). Nous avons énoncé le théorème sous sa forme précise dans une conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Fribourg le 24 février 1918. (*L'Enseignement mathématique*, t. XX, 1918, p. 35).

Nous connaissons déjà le théorème direct (n° 3
démontrer la réciproque. On a, par hypothèse, q

$$\rho_n = \frac{1}{n^r}\left(\frac{M}{n^\alpha}\right),$$

de sorte que la fonction $\Omega(x)$ des théorèmes précéd

$$\Omega(x) = \frac{M}{x^\alpha}.$$

Les conditions des théorèmes I et II sont vérifiée

L'intégrale $\int^{\infty} \Omega(x)\frac{dx}{x}$ existe et $x^\alpha\Omega(x)$ est égal
décroissant. Donc, en vertu du théorème précéde
dérivée continue d'ordre r, qui admet le module de

$$\omega(\delta) = h'\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{h'}{\alpha}\delta^\alpha,$$

ce qui est une condition de Lipschitz d'ordre α.

Le théorème précédent suppose essentiellement
ses limites o et 1. A ces limites, la correspondance
précise. On s'en apercevra dans les théorèmes suiva

42. Théorème IV. — *S'il est possible, quel que so*
senter $f(x)$ par une expression trigonométrique
avec une approximation

$$\rho_n = \frac{M}{n^r(\log n)^{1+\alpha}},$$

où M *et α sont des constantes positives, $f(x)$ posséd*
d'ordre r, laquelle admet le module de continuit

$$\omega(\delta) = \frac{h}{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^\alpha} \qquad (h \text{ const.})$$

Les conditions des théorèmes I et II sont enco
Donc, en vertu du théorème II, $f(x)$ admet une dér

d'ordre r, laquelle admet le module de continuité

$$\omega(\delta) \leqq h' \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{1+\alpha}} = \frac{h'}{\alpha} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}},$$

ce qui prouve le théorème.

On s'assure facilement qu'à tout critérium de convergence absolue des intégrales à limites infinies, on peut faire correspondre un théorème analogue aux précédents. On peut ainsi formuler un théorème correspondant à chacun des critériums de convergence de Cauchy, basés sur la considération des fonctions successives :

$$\frac{1}{x^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{x(\log x)^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{x \log x (\log \log x)^{1+\alpha}}, \quad \cdots$$

Les théorèmes III et IV correspondent aux deux premiers termes.

43. Les cas d'exception au théorème I. — Le théorème I suppose la convergence de l'intégrale

$$\int^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x}.$$

Cette condition est essentielle pour que l'on puisse affirmer l'existence et la continuité de la dérivée d'ordre r. L'hypothèse que $\Omega(x)$ tende vers zéro pour $x = \infty$ ne suffit pas. Nous allons le montrer par un exemple très caractéristique, dans le cas où $r = 1$.

Soit $\Omega(x)$ une fonction continue de x qui tend *en décroissant* vers zéro quand x tend vers l'infini. Définissons $f(x)$ par la série absolument et uniformément convergente

$$f(x) = \frac{\Omega(1)}{1} \sin x + \frac{\Omega(2)}{2^2} \sin 2x + \ldots + \frac{\Omega(n)}{n^2} \sin nx + \ldots$$

Les n premiers termes donnent une représentation d'ordre n avec l'approximation

$$\rho_n < \Omega(n) \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots \right] < \frac{\Omega(n)}{n}.$$

C'est la condition envisagée dans le théorème I pour $r = 1$. Nous allons montrer que *la continuité ou la non continuité de*

la dérivée $f'(x)$ dépendent exclusivement de l'e

la non existence de $\int^{\infty} \Omega(x)\frac{dx}{x}$...

Remarquons d'abord que l'existence ou la non ex
intégrale entraînent la convergence ou la diverge
positive

$$\frac{\Omega(1)}{1}+\frac{\Omega(2)}{2}+\ldots+\frac{\Omega(n)}{n}\ldots \tag{1}$$

car, $\Omega(x)$ étant décroissant, cette série est comprise
bornes

$$\int_1^{\infty} \Omega(x)\frac{dx}{x}, \qquad \Omega(1)+\int_1^{\infty} \Omega(x)\frac{dx}{x}$$

Donc, si l'intégrale existe, auquel cas la série conve
une dérivée continue $f'(x)$, qui s'exprime par la sé

$$f'(x) = -\frac{\Omega(1)}{1}\cos x - \frac{\Omega(2)}{2}\cos 2x \ldots \tag{2}$$

parce que cette série est uniformément convergent
Supposons maintenant l'intégrale infinie et la
gente.

La dérivée $f'(x)$ existe, est continue et est don
mule (2), sauf pour les valeurs $x = 0$ (mod. 2π),
reste uniformément convergente dans les intervall
pas ces valeurs. C'est la conséquence d'un lemme c
Les sommes partielles

$$\cos kx + \cos(k+1)x + \ldots + \cos lx$$

sont alors bornées, car elles sont de module moind

$$\left|\sum_{\lambda=k}^{l} e^{\lambda x i}\right| \le \left|\frac{2}{e^{xi}-1}\right| \tag{3}$$

et cela entraîne la convergence uniforme de la séri
les coefficients des cosinus vont en décroissant.

Mais si x tend vers zéro, $f(x)$ augmente ind
dérivée est discontinue. Nous allons, en effet,
série (2) augmente indéfiniment. A cet effet, soit

entier contenu dans $\frac{\pi}{2x}$. Partageons la série (2) en deux parties

$$\sum_{\lambda=1}^{X} \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda} \cos\lambda x + \sum_{X+1}^{\infty} \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda} \cos\lambda x.$$

La première tend manifestement vers l'infini quand x tend vers zéro, car tous les termes sont positifs et la série $\sum \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda}$ est infinie. Mais je dis que la seconde partie reste finie. Appliquons de nouveau le lemme d'Abel, en nous servant de la borne (3) que nous venons d'assigner aux sommes partielles de cosinus. La seconde partie est de module moindre que

$$\frac{\Omega(X+1)}{X+1} \left| \frac{2}{e^{ix}-1} \right| \leqq \Omega\left(\frac{\pi}{2x}\right) \frac{4}{\pi} \left| \frac{x}{e^{ix}-1} \right|.$$

Quand x tend vers zéro, le dernier facteur a pour limite l'unité et l'expression entière tend vers zéro avec le facteur $\Omega\left(\frac{\pi}{2x}\right)$. Donc la somme des deux parties de la série (2) tend vers l'infini.

Cet exemple simple prouve combien est stricte la condition d'existence de l'intégrale à limite infinie formulée dans le théorème I.

Le même exemple prouve aussi que l'exclusion du cas limite $\alpha = 1$ est essentielle dans l'énoncé du théorème III. La condition

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+1}} \qquad (\text{M const.})$$

n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une condition de Lipschitz d'ordre 1 pour la dérivée d'ordre r, ou pour la fonction elle-même, si $r = 0$ (comme dans l'exemple précédent). On a, dans cet exemple, $\rho_n < \frac{\Omega(n)}{n}$, et cependant $f(x)$ n'est pas lipschitzienne puisque sa dérivée n'est pas bornée. Toutefois, sous la condition $\rho_n < M : n^{r+1}$, la dérivée d'ordre r est continue et le théorème suivant permet d'en évaluer le module de continuité.

44. Théorème V. — *S'il est possible, quel que soit n, de représenter $f(x)$ par une expression trigonométrique d'ordre $\leqq n$*

avec une approximation

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+1}} \qquad (M \text{ const.}),$$

alors $f(x)$ *possède une dérivée continue d'ordre* r, *qui admet le module de continuité*

$$\omega(\delta) \leq h\,\delta|\log\delta| \qquad (h \text{ const.}).$$

En effet, le théorème I, où il faut faire

$$\Omega(x) = \frac{1}{x},$$

assigne à $\omega(\delta)$ la borne

$$h\left[\delta\int_a^{\frac{a}{\delta}}\frac{dx}{x} + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\right] = h\,\delta[|\log\delta| + 1],$$

ce qui revient (sauf la valeur de h) à la forme proposée.

En particulier, si l'on a, comme dans l'exemple du n° précédent,

$$\rho_n < \frac{M}{n},$$

$f(x)$ admet le module de continuité

$$\omega(\delta) < h\,\delta|\log\delta|,$$

mais on ne peut pas affirmer l'existence de la dérivée.

CHAPITRE V.

APPROXIMATION PAR POLYNOMES ; RÉDUCTION A UNE APPROXIMATION TRIGONOMÉTRIQUE.

45. Polynomes trigonométriques. Réduction des deux modes d'approximation l'un à l'autre. — Comme nous le savons déjà (n^o 5), l'approximation par polynomes revient à une approximation trigonométrique. Tout intervalle (a, b) se ramène à l'intervalle $(-1, +1)$ par une substitution linéaire, il suffit donc d'étudier l'approximation par polynomes dans l'intervalle $(-1, +1)$. C'est ce que nous allons faire.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans cet intervalle. La substitution

$$x = \cos t$$

transforme $f(x)$ en $f(\cos t) = \varphi(t)$, qui est une fonction paire et périodique de t. L'approximation trigonométrique de $\varphi(t)$ et celle de $f(x)$ par des polynomes sont deux problèmes complètement équivalents. Cette équivalence est mise le plus simplement en évidence par l'emploi des polynomes trigonométriques.

Le polynome trigonométrique de degré n est défini par la formule

$$P_n(x) = \cos n \operatorname{arc} \cos x.$$

Cette formule définit effectivement un polynome en x de degré n, car on a

$$\cos nt = \frac{e^{nti} + e^{-nti}}{2} = \frac{(\cos t + i \sin t)^n + (\cos t - i \sin t)^n}{2};$$

et, par la substitution

$$\cos t = x, \qquad \text{d'où} \qquad t = \operatorname{arc} \cos x,$$

il vient

$$\cos n \operatorname{arc} \cos x = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-}}{2}$$

Comme les radicaux se détruisent, cette expressio
polynome en x de degré n.

Il est immédiat que la substitution $x = \cos t$ fai
à tout polynome approché de $f(x)$ dans l'interva
une expression trigonométrique approchée de $f($
proque est également vraie. Supposons que nous
pour $f(\cos t)$ une expression trigonométrique appro
ne contenant que des cosinus puisque $f(\cos t)$ es
à-dire que nous ayons, avec une certaine approxima

$$f(\cos t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \cos 2t + \ldots + \alpha_n \mathrm{c}$$

nous aurons, avec la même approximation,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{P}_1(x) + \alpha_2 \mathrm{P}_2(x) + \ldots + \alpha_n \mathrm{P}_n$$

46. Série de polynomes trigonométriques. — No
série de polynomes trigonométriques de $f(x)$ l
déduit de celle de Fourier de $f(\cos t)$ par la métho
Le développement de $f(\cos t) = \varphi(t)$ en série de F
forme

$$\frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \ldots + a_n \cos nt +$$

où l'on a

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \cos nt \, dt.$$

Le développement de $f(x)$ en série de polynom
triques dans l'intervalle $(-1, +1)$, sera

$$\frac{1}{2} a_0 + a_1 \mathrm{P}_1(x) + a_2 \mathrm{P}_2(x) + \ldots + a_n \mathrm{P}_n(x) +$$

où a_n, exprimé en fonction de x, sera

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(x) \mathrm{P}_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

47. Bornes inférieures assignables à la meilleure
par polynomes. — Les deux règles que nous avons

considération des séries de Fourier, et qui assignent une borne inférieure à la meilleure approximation trigonométrique, se traduisent en règles correspondantes relatives à la meilleure approximation par polynomes dans l'intervalle $(-1, +1)$. Voici d'abord l'énoncé qui correspond à la première (n° 9, 6°) :

I. *La meilleure approximation d'une fonction continue $f(x)$ par un polynome de degré n dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *n'est pas inférieure à*

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \ldots)},$$

où les a_k sont les constantes de Fourier de $f(\cos t)$.

L'énoncé qui correspond à la seconde règle, c'est-à-dire à celle de Lebesgue (n° 17), sera le suivant :

II. *Si la somme de degré n des termes du développement de $f(x)$ en série de polynomes trigonométriques donne une approximation ρ_n, la meilleure approximation de $f(x)$ par un polynome de degré n dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *n'est pas inférieure à*

$$\frac{\rho_n}{A\log n + B},$$

où A *et* B *sont deux nombres assignés* a priori.

48. Approximation obtenue par transformation de l'intégrale de Fejér généralisée $F_2(x, n)$ (n° 31). — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $(-1, +1)$. Formons l'expression $F_2(t, n)$ relative à $f(\cos t)$ (n° 32). Cette expression est un polynome en $\cos t$ et elle représente $f(\cos t)$ avec une approximation qui fait l'objet du théorème I du n° 33. Par la substitution $\cos t = x$, $F_2(t, n)$ se transforme dans un polynome en x fournissant, pour $f(x)$, la même approximation. Soit $\omega(\delta)$ le module de continuité de $f(x)$, celui de $f(\cos t)$ ne lui est pas supérieur, car $\cos t$ varie moins vite que t. Le théorème I du n° 33 se transforme donc dans celui-ci :

Théorème I. — *Si $f(x)$ admet le module de continuité $\omega(\delta)$ dans l'intervalle* $(-1, +1)$, *le polynome approché de*

degré $2n-2$ transformé de $F_2(r, t)$ *fournit* [...]
mation

$$\rho \leq A\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

où A *est un nombre* ≤ 3 (¹).

Supposons ensuite que $f(x)$ ait une dérivée conti[...] le module de continuité $\omega_1(\delta)$. Proposons-nous [...] théorème II du n° 34. Il faut au préalable calculer [...] continuité de

$$Df(\cos t) = -f'(\cos t)\sin t.$$

Si l'on donne à t un accroissement h de module [...] ment de cette dérivée est

$$-f'(\cos t)\Delta\sin t - \sin(t+h)\Delta f',$$

où Δ est la caractéristique de l'accroissement d[...] Mais $|\Delta \sin t|$ est $\leq \delta$ et $|\sin(t+h)|$ est ≤ 1; don[...] précédente et, par conséquent, le module de continui[...] sont inférieurs à

$$\delta \max.|f'| + \omega_1(\delta).$$

Supposons qu'on ait $f'(0) = 0$. On peut toujours [...] condition en retranchant au préalable de $f(x)$ le [...] premier degré $xf'(0)$, ce qui ne change pas le mo[...] nuité de la dérivée. Dans cette hypothèse, on a, ent[...]

$$|f'(x)| \leq \omega_1(1)$$

et le module de continuité de $Df(\cos t)$ est inférieur [...]

$$\delta\omega_1(1) + \omega_1(\delta).$$

Le théorème II du n° 34 conduit ainsi au suivant

THÉORÈME II. — *Soit $f(x)$ une fonction dont [...] première admet le module de continuité $\omega_1(\delta)$ [...] valle* $(-1, +1)$; *on peut en définir un polyno[...]*

(¹) M. D. Jackson a défini le premier un polynome donnant la [...] mation (*Dissertation inaugurale*, Satz V, p. [...]). C'est à l'occa[...] rème qu'il introduit la fonction $\omega(\delta)$.

d'ordre $2n-2 (n>1)$ *donnant une approximation*

$$\rho < A\left[\frac{\omega_1(1)}{n^2}+\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right] < 2A\,\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

où A *est un nombre* $< 5:2$.

Pour aller plus loin et formuler des théorèmes concernant le cas où la dérivée d'ordre r quelconque existe, il convient de chercher d'abord une borne de $|D^r f(\cos t)|$.

49. Borne de $|D^r f(\cos t)|$. — Le calcul de proche en proche met en évidence que l'on a

$$D^r f(\cos t) = \sum_{s=1}^{r} f^{(s)}(\cos t)\,\frac{P_s}{s!},$$

où P_s est un polynome de degré s en $\sin t$ et $\cos t$, indépendant de f. Pour déterminer P_s, il est donc permis de supposer f développable en série de Taylor. Posons

$$x=\cos t, \qquad f(x)=F(t), \qquad k=\cos(t+h)-\cos t;$$

il vient, par la formule de Taylor,

$$F(t+h)=f(x+k)=\sum_{0}^{\infty} f^{(s)}(x)\,\frac{k^s}{s!}.$$

Dérivons r fois par rapport à h, puis posons $h=0$. En observant que k s'annule avec h, il reste

$$F^{(r)}(t)=\sum_{s=1}^{r} f^{(s)}(x)\,\frac{1}{s!}\,[D_h^r k^s]_{h=0};$$

d'où, par comparaison avec la formule du début,

$$P_s=[D_s^r k^s]_{h=0}.$$

Cherchons maintenant une borne supérieure de $|P_s|$. A cet effet, remarquons qu'on a

$$k=\cos(t+h)-\cos t=\cos t(\cos h-1)-\sin t\sin h.$$

Il s'ensuit que le développement de k suivant les puissances de h

s'obtient en multipliant les termes du développem
respectivement par l'un des quatre facteurs cos
modules $\overline{\gtrless} 1$, et qu'on a, par conséquent, même pou

$$|k| \quad e^{|h|} \quad 1.$$

Faisons décrire à h une circonférence de rayon
l'origine; nous aurons, pour h o, par la form
classique de Cauchy, le maximum étant pris sur la

$$|D_h^r k^s|_{h=0} \leq r! \max. |k^s| \quad r!(e \quad 1)^s.$$

Substituons ces majorantes dans la formule de dér
plus haut; il vient

$$|D^r f(\cos t)| \quad r! \sum_{s=1}^{r} |f \quad (x)| \quad \frac{(e \quad 1)^s}{s!}.$$

Introduisons des hypothèses plus particulières
tion $f(x)$. Supposons que $f^{(r)}(x)$ soit de module
et $+1$ et que les dérivées des ordres moindres s'an
ainsi que $f(x)$ pour x o. Nous avons, dans ce cas,

$$|f^{(r)}(x)| \leq M_r, \quad |f^{(r-1)}(x)| \quad \frac{M_r |x|}{1}, \quad f$$

et, par conséquent, dans l'intervalle (1, 1),

$$|f^{(r)}(x)| \leq M_r, \quad |f^{(r-1)}(x)| \leq \frac{M_r}{1}, \quad \ldots, \quad f$$

Substituant de nouveau ces majorantes, il vient

$$|D^r f(\cos t)| \leq M_r \sum_{s=1}^{r} \frac{r!}{s!(r \quad s)!} (e \quad 1)^s \quad M_r(e$$

Cette borne suppose que $f(x)$ et ses r 1 premi
s'annulent pour $x = 0$, mais on peut toujours réalis
dition en retranchant de $f(x)$ un polynome
degré $r-1$, ce qui ne change pas la dérivée d'or
conséquent, la valeur de M_r. Nous allons utiliser ce
dans le numéro suivant.

50. Approximation par les séries de polynome

triques [1]. — En vertu du théorème III du Chapitre II (n° 18), on peut assigner *a priori* deux constantes A et B, telles que si $\varphi(t)$ de période 2π admet une dérivée d'ordre r de module $< M_r$, l'approximation fournie par la somme de Fourier d'ordre n quelconque de φ est inférieure à

$$(A \log n + B) \frac{M_r}{n^r}.$$

Si l'on suppose $f^{(r)}(x)$ de module $< M_r$, il existe un théorème correspondant sur la représentation de $f(x)$ en série de polynomes trigonométriques. Dans ce cas, l'approximation est la même que celle de $f(\cos t) = \varphi(t)$ en série de Fourier; elle sera donc donnée par la formule précédente, où il faut seulement remplacer M_r par une borne supérieure de $|D^r f(\cos t)|$.

Considérons une somme d'ordre $n \geqq r - 1$. Alors, pour calculer cette borne, nous pouvons admettre que f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $r - 1$ s'annulent pour $x = 0$, auquel cas cette borne est $M_r e^r$. Cela est permis, parce que, si cette condition n'avait pas lieu; on la réaliserait en retranchant de f un polynome convenable P de degré $r - 1$. Or $f - P$ a même dérivée d'ordre r que f et, d'autre part, le développement en série de polynomes trigonométriques de f s'obtient en ajoutant P à celui de $f - P$. Donc, pour un ordre $n \geqq r - 1$, l'approximation de f est la même que celle de $f - P$. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème III. — *Si $f(x)$ admet, dans l'intervalle $(-1, +1)$, une dérivée intégrable et de module $< M_r$, la somme de degré $n \geqq r - 1$ de la série de polynomes trigonométriques de $f(x)$ fournit, dans cet intervalle, une approximation inférieure à*

$$(A \log n + B) M_r \left(\frac{e}{n}\right)^r,$$

où A et B sont les deux mêmes nombres que dans le théorème rappelé (n° 18).

Ce théorème en fournit un second concernant le cas où la dérivée d'ordre r est continue. Voici ce théorème, que nous allons démontrer :

---

[1] C'est M. Bernstein qui a étudié le premier cette question (*Sur la meilleure approximation des fonctions continues*, Chap. VI).

Théorème IV. — *Si $f(x)$ admet, dans l'intervalle (— une dérivée d'ordre r dont le module de continuité s la somme de degré $n \geqq r$ de la série de polynomes tri triques de $f(x)$ fournit, dans cet intervalle, une app tion inférieure à* (¹)

$$(\mathrm{A}\log n + \mathrm{B})(e^r + e^{r+1})\frac{\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r},$$

où A *et* B *sont les mêmes nombres que ci-dessus.*

Soit δ une partie aliquote de l'unité; inscrivons gone $y = \psi(x)$ dans la courbe $y = f^{(r)}(x)$, en pren sommets tous les points d'abscisses $\lambda\delta$ (λ entier); no comme dans la démonstration du théorème V du Ch (n° 21),

$$|f^{(r)} - \psi| \leqq \omega_r(\delta), \qquad |\psi'| \leqq \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

Soit F une fonction admettant ψ pour dérivée d'ordr avons

$$|(f - \mathrm{F})^{(r)}| = |f^{(r)} - \psi| \leqq \omega_r(\delta), \qquad |\mathrm{F}^{(r+1)}| = |\psi'| \leqq \frac{\omega_r(}{\delta}$$

Faisons la décomposition $f = (f - \mathrm{F}) + \mathrm{F}$ et désignon R'_n, R''_n les restes des séries de f, $f - \mathrm{F}$ et F respectivem avons, pour $n \geqq r$, en vertu du théorème précédent,

$$|\mathrm{R}'_n| \leqq (\mathrm{A}\log n + \mathrm{B})\left(\frac{e}{n}\right)^r \omega_r(\delta),$$

$$|\mathrm{R}''_n| \leqq (\mathrm{A}\log n + \mathrm{B})\left(\frac{e}{n}\right)^{r+1} \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Mais $\mathrm{R}_n = \mathrm{R}'_n + \mathrm{R}''_n$. Ajoutons donc les deux égalités pr et faisons $\delta = \frac{1}{n}$; nous trouvons la borne assignée à R_n.

51. Polynomes conduisant, dans le cas général, à une approximation. — Le théorème III *bis* du Chapitre III (transforme aussi par la substitution $x = \cos t$; et, m

(¹) M. Bernstein énonce un théorème qui rentre comme cas parti celui-ci. Toutefois, il n'étudie pas la manière dont l'approximation [*Sur la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 59)].

l'introduction d'un polynome auxiliaire de degré $< r$ (comme dans le cas précédent), on est conduit au théorème suivant :

THÉORÈME V (¹). — *On peut définir* a priori *une fonction* $\Psi_1(r)$ *de* r *seul qui jouit de la propriété suivante : quel que soit l'entier* $m \geq r$, *une fonction* $f(x)$ *dont la dérivée d'ordre* r *est intégrable et de module* $\leq M_r$ *dans l'intervalle* $(-1, +1)$, *peut être représentée dans cet intervalle par un polynome de degré* $\leq m$, *convenablement choisi, avec une approximation*

$$\rho < \Psi_1(r)\frac{M_r}{m^r}.$$

Cette fonction Ψ_1 est effectivement égale à $e^r\psi_1$, où ψ_1 est la fonction définie dans le théorème rappelé (n° 37).

Enfin nous pouvons énoncer un dernier théorème, qui se déduit du précédent comme le théorème IV de III, au numéro précédent :

THÉORÈME VI. — *Quel que soit l'entier* $m > r$, *une fonction* $f(x)$, *dont la dérivée d'ordre* r *admet le module de continuité* $\omega_r(\delta)$, *peut être représentée dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *par un polynome convenable de degré* $\leq m$ *avec une approximation*

$$\rho < [\Psi_1(r) + \Psi_1(r+1)]\frac{\omega_r\left(\frac{1}{m}\right)}{m^r},$$

où Ψ_1 *est la fonction de* r *seul définie dans le théorème précédent.*

En particulier, si $f^{(r)}(x)$ *satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* α, *on peut assigner une constante* M *par rapport à* n, *telle que l'on ait, quel que soit* n,

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+\alpha}}.$$

(¹) C'est M. D. Jackson qui a construit le premier des polynomes donnant une approximation de l'ordre indiqué ici. C'est lui aussi le premier qui a montré que les coefficients analogues à Ψ_1 ne dépendent que de r (*Dissertation inaugurale*, Satz IV *a*, p. 40). Toutefois, il n'a pas étendu ce dernier résultat à la représentation trigonométrique. Les résultats de sa Thèse ont été précisés dans un Mémoire plus récent : *On approximation by trigonometric Sums and polynomials* (*Trans. of the Amer. math. Society*, 1912).

Dans le cas plus particulier où $\alpha = 1$, ce théorèm[illegible]
par M. Dunham Jackson [1].

52. Le problème inverse. — La question de remo[illegible]
de l'approximation par polynomes aux propriétés
de la fonction se ramène au même problème concer[illegible]
mation trigonométrique, donc aux théorèmes énonc[illegible]
pitre précédent. Nous ne reprendrons pas cette que[illegible]
et nous nous bornerons à quelques énoncés [illegible]
L'approximation de $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ [illegible]
polynome de degré n est la même que celle de [illegible]
par une expression trigonométrique d'ordre n. O[illegible]

$$\frac{d}{dx} = -\frac{d}{\sin t \, dt}.$$

On en conclut, Q_k désignant un polynome en $\sin t$ [illegible]

$$f^{(r)}(x) = \frac{1}{\sin^r t} \sum_{k=1}^{r} \varphi^{(k)}(t) Q_k \qquad [illegible] \sum [illegible]$$

Ainsi l'existence et la continuité des dérivées d[illegible]
valle $(-1, +1)$ entraînent celles des dérivées de f [illegible]
ordre, dans le même intervalle, sauf aux limites [illegible]
admet un module de continuité de l'une des forme[illegible]

$$\omega(\delta) < M \delta^{\alpha}, \quad \omega(\delta) < M \delta \log \delta, \ [illegible]$$

le module de continuité de $f^{(r)}(x)$ vérifiera une in[illegible]
forme dans tout intervalle intérieur (au sens etroi[illegible]
Seule la valeur de la constante M peut changer. O[illegible]
que tout intervalle fini (a, b) se transforme en [illegible]
substitution linéaire, qui n'altère pas les propriét[illegible]
Il résulte de là que les théorèmes III (n° 41) et V [illegible]
pitre précédent entraînent les théorèmes correspon[illegible]

Théorème VII. — *Si, dans un intervalle $(a, b$ [illegible] une dérivée continue d'ordre r qui satisfait [illegible] de Lipschitz d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$, alors, qu[illegible] $f(x)$ peut être (en vertu du théorème VI) rep[illegible]*

---

(1) *Dissertation inaugurale*, Satz II, p. [illegible]

polynome de degré $\overline{\gtrless} n$ avec une approximation

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+\alpha}} \qquad (M \text{ const.}).$$

Réciproquement, si l'on peut vérifier cette condition, quel que soit n, alors $f(x)$ admet, dans tout intervalle intérieur à (a, b), une dérivée continue d'ordre r qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α [1].

Le cas où $\alpha = 1$ est exclu et fait exception. La réciprocité n'est plus complète. Dans ce cas, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si, quel que soit n, $f(x)$ peut être représenté dans l'intervalle (a, b) par un polynome d'ordre $\overline{\gtrless} n$ avec une approximation*

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+1}} \qquad (M \text{ const.}),$$

alors $f(x)$ possède, dans tout intervalle donné intérieur à (a, b), une dérivée d'ordre r, qui admet le module de continuité

$$\omega(\delta) = h\,\delta\,|\log \delta| \qquad (h \text{ const.}).$$

La seconde Partie du théorème VII (partie réciproque) est due, en grande partie, à M. Bernstein. Ce savant géomètre a, en effet, démontré, dans la même hypothèse, l'existence de toute condition de Lipschitz d'ordre $< \alpha$ [2]. Il a aussi signalé les exceptions qui se produisent dans le cas $\alpha = 1$ [3]. M. Bernstein traite directement la représentation par polynomes, mais la représentation trigonométrique donne lieu à des théorèmes plus simples et il est plus avantageux de traiter celle-ci pour commencer. C'est ce que nous avons fait.

---

(1) M. P. Montel vient d'établir (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1919) un théorème analogue. Il remplace seulement la propriété de vérifier une condition de Lipschitz d'ordre α par celle d'admettre des dérivées généralisées de Liouville de tous les ordres $< \alpha$. On doit, par conséquent, en conclure qu'*une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre α admet des dérivées de tout ordre $< \alpha$*. Ce théorème a été énoncé récemment par M. Hermann Weyl (*Vierteljahrschrift de Zurich*, 1917). Je dois ce dernier renseignement à une Communication obligeante de M. Montel.

(2) *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues*

CHAPITRE VI.

POLYNOME D'APPROXIMATION MINIMU

53. Polynome de Lagrange. — On sait qu'u
degré $\overline{\gtrless} n$ est complètement déterminé par les va
arbitraires, qu'il prend en $n+1$ points donnés x
Nous supposerons généralement que ces valeurs s
par une fonction donnée $f(x)$. Alors le poly
degré $\overline{\gtrless} n$, qui prend les mêmes valeurs que $f(x)$
donnés, s'exprime par une formule classique con
de *formule de Lagrange*. Cette formule est la su

$$P(x) = S(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x - x_i} \frac{f(x_i)}{S'(x_i)},$$

où $S(x)$ est le polynome de degré $n+1$

$$S(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n$$

L'exactitude de cette formule se vérifie immé
tire les conséquences suivantes, qui nous seront

1° Si un polynome variable de degré $\overline{\gtrless} n$ est
points donnés (donc *a fortiori* s'il est borné da
tous ses coefficients sont bornés.

2° Un polynome variable de degré $\overline{\gtrless} n$ qui p
infiniment petites en $n+1$ points donnés, a tou
infiniment petits.

3° Deux polynomes variables de degré $\overline{\gtrless} n$
valeurs infiniment voisines en $n+1$ points d
coefficients de même rang infiniment voisins et
ces polynomes sont infiniment voisins.

54. Approximation minimum dans un intervalle. — Soient $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

un polynome de degré n *à coefficient réels*. Considérons ce polynome, supposé donné, comme une expression approchée de $f(x)$ dans (a, b). La différence, positive ou négative,

$$P(x) - f(x),$$

est l'*écart* au point x. Le maximum de la valeur absolue de l'écart dans l'intervalle (a, b) est l'*approximation* fournie par P dans cet intervalle.

Considérons maintenant l'ensemble de tous les polynomes de degré $\overline{\underset{<}{}}\, n$. Chacun d'eux représente $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) avec une approximation qui lui correspond, ρ'. La borne inférieure de ρ' pour cet ensemble est un nombre positif ou nul. Cette borne est *l'approximation minimum* ou *la meilleure approximation* d'ordre n. Nous la désignerons par ρ. Nous allons prouver qu'il existe un polynome de degré $\overline{\underset{<}{}}\, n$ et un seul qui fournit cette approximation ρ : c'est le *polynome d'approximation minimum dans (a, b) pour l'ordre n*.

55. Existence du polynome d'approximation minimum (¹). — *Il existe un polynome $P(x)$ de degré $\overline{\underset{<}{}}\, n$ qui réalise l'approximation minimum ρ.*

Par définition de ρ, on peut assigner une suite de polynomes P_1, P_2, ..., P_k, ... de degré $\overline{\underset{<}{}}\, n$, tels que les approximations correspondantes ρ'_1, ρ'_2, ..., ρ'_k, ... tendent vers ρ. Dans ce cas, la suite P_1, P_2, ... tend uniformément vers $f(x)$ dans (a, b). Donc ces polynomes sont bornés dans (a, b) (quel que soit leur indice) et, par conséquent, tous leurs coefficients sont bornés aussi et de module inférieur à un nombre fixe M (53). Donc de la suite infinie P_1, P_2, ..., on peut extraire une suite P'_1, P'_2, ..., infinie

(¹) Tchebycheff, qui a introduit cette notion, a admis sans démonstration l'existence du polynome d'approximation minimum. Celle-ci a été démontrée par M. E. Borel [*Leçons sur les fonctions de variables réelles*, 1905. *Voir* aussi Kirschberger, *Ueber Tchebycheff Annaherungsmethode* (*Inaugural-Dissertation*, Göttingen, 1902)].

aussi, telle que le coefficient de x^n ait une limit
P'_2, ... on peut extraire une suite P_1, P_2, ..., tel
cient de x^{n-1} ait une limite, et ainsi de suite.
formera une suite de polynomes ayant une lim
nome P réalise l'approximation minimum ζ. Nous
dans le numéro suivant, que ce polynome est u
connaître les propriétés les plus caractéristiques.

56. **Propriétés du polynome d'approximation m**
intervalle (a, b). — 1° *Si le polynome* P *de*
d'approximation minimum dans l'intervalle
assigner $n+2$ *points de l'intervalle* (a, b), *o*
atteint ses valeurs extrêmes $\pm\zeta$ *supposées*
nance de signes d'un point au suivant (1).

Considérons l'écart variable

$$\varphi(x) = f(x) - P(x).$$

Comme il est fonction continue de x, on peu
valle (a, b) en intervalles consécutifs assez pet
s'annule dans aucun des intervalles où il att
valeurs extrêmes $\pm\zeta$. Soit

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$$

la suite de ces intervalles où $\varphi(x)$ atteint l'un
extrêmes, et soit

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$$

la suite des unités du signe de $\varphi(x)$ dans chacun
rème énoncé revient à dire que cette dernière s
moins $n+1$ variations de signes. Je vais prouv
avait moins, P ne serait pas d'approximation min

Si tous les termes de la suite étaient de même s
drait sa borne $+\zeta$ ou $-\zeta$ avec le même signe pa
d'ajouter à P une constante très petite de ce
améliorer l'approximation.

Supposons donc que la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, contien

(1) E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réel*

de deux termes consécutifs de signes contraires. Soit ε_i, ε_{i+1} l'un quelconque de ces groupes. Les deux intervalles correspondants δ_i δ_{i+1} ne sont pas contigus (φ ne s'annulant dans aucun des deux). Nous pouvons donc assigner un point ξ intermédiaire entre δ_i et δ_{i+1}, limites exclues. Soit

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_k$$

la suite des points ξ ainsi choisis et correspondant aux k groupes consécutifs. Formons le polynome de degré $\overline{\gtrless} n$:

$$\psi(x) = \varepsilon_1(\xi_1 - x)(\xi_2 - x)\ldots(\xi_k - x),$$

où ε_1 désigne, comme précédemment, l'unité du signe de φ dans δ_1. Ce polynome aura le signe de φ dans chacun des intervalles δ_1, δ_2, ... et ne s'y annulera pas. Ceci fait, soit ε un nombre positif, je dis que le polynome de degré $\overline{\gtrless} n$,

$$\mathrm{P} + \varepsilon\psi,$$

fournira dans (a, b) une approximation $< \rho$, pourvu que ε soit suffisamment petit.

En effet, soit $\rho' < \rho$ la borne de $|\varphi|$ dans les intervalles autres que δ_1, δ_2, ..., δ_m. On obtiendra le résultat demandé, en prenant ε assez petit pour que $|\varepsilon\psi|$ soit $< \rho - \rho'$ dans (a, b). La valeur absolue de l'écart dû à $\mathrm{P} + \varepsilon\psi$, à savoir

$$|f - \mathrm{P} - \varepsilon\psi| = |\varphi - \varepsilon\psi|,$$

sera effectivement $< \rho$ dans les intervalles δ_1, δ_2, ... où φ et ψ sont de même signe; elle le sera encore dans les autres, car on aura, dans ceux-ci,

$$|\varphi - \varepsilon\psi| < |\varphi| + |\varepsilon\psi| < \rho' + (\rho - \rho') < \rho.$$

2° *Le polynome d'approximation minimum est unique.*

En effet, soient P et Q deux polynomes de degrés $\overline{\gtrless} n$, fournissant l'approximation minimum ρ. Le polynome, de degré $\overline{\gtrless} n$,

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{Q}}{2},$$

fournit une approximation $\overline{\gtrless} \rho$, car on a

$$f - \mathrm{R} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{P}) + \frac{1}{2}(f - \mathrm{Q}).$$

Donc R est un nouveau polynome d'approxim
et $|f - R|$ atteint ρ en $n+2$ points, en vertu d
n'est possible que si, en ces points, $f - P$ et f
simultanément et avec le même signe leurs valeurs
Alors P et Q, prenant la même valeur en $n+$
identiques.

3° *La propriété* 1° *caractérise le polynome* P
tion minimum. En effet, soit Q *un polynome d*
l'écart $f - Q$ *atteint son maximum absolu* ρ' *a*
de signes en $n+2$ *points consécutifs de l'int*
alors $\rho' = \rho$ *et, en vertu de* 2°, Q *est identique a*

Si ρ' était $> \rho$, le polynome de degré n

$$P - Q = (f - Q) - (f - P)$$

aurait le signe de $f - Q$ aux points où cet écart
changerait donc $n+2$ fois de signe et aurait n
moins, ce qui est impossible.

57. Borne inférieure de l'approximation minim
un polynome de degré n; *si* $f - Q$ *est de s*
en $n+2$ *points consécutifs de l'intervalle* $(a, b$
chacun de ces points une valeur absolue ρ', *a*
En d'autres termes, ρ' *est une borne inférieure*
mation minimum (1).

La démonstration est identique à celle qu'on vie
la proposition 3° qui précède.

Il y a lieu d'observer que si l'écart $f - Q$ pr
alternés en $n+2$ points consécutifs de l'intervall
proximation minimum sera intermédiaire entre
valeur absolue de l'écart sur cet ensemble de poin
mation fournie par Q dans (a, b) tout entier.

58. Approximation minimum d'ordre n **sur u**
$n+2$ **points** (2). — Il est utile, pour préciser les

(1) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur les polynomes d'app*
représentation approchée d'un angle (*Bull. de l'Ac. Roy. d*
des Sciences, n° 12, 1910. Théorème n° 15).

(2) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Mémoire cité.

polynome d'approximation d'ordre n dans un intervalle, de définir et d'étudier le polynome d'approximation dans un ensemble de $n+2$ points de cet intervalle.

Considérons donc un ensemble E de $n+2$ points de l'intervalle (a, b)

$$(\mathrm{E}) \qquad x_0 < x_1 < x_2, \quad \ldots, \quad < x_n < x_{n+1}$$

et une fonction $f(x)$ qui prend des valeurs déterminées en chacun de ces points. Je vais montrer que, parmi les polynomes d'ordre $\overline{\gtrless} n$, il en est un qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ pour l'ensemble des points de E. Ce polynome est, pour l'ordre n, le polynome d'approximation de $f(x)$ sur l'ensemble E, et je vais encore montrer que ce polynome est unique.

Par définition, ce polynome $\mathrm{P}(x)$ est celui qui minime le plus grand des écarts absolus

$$|f(x_i) - \mathrm{P}(x_i)| \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1).$$

Nous allons montrer qu'il se détermine par des calculs purement algébriques.

Proposons-nous d'abord de déterminer un polynome

$$\mathrm{Q} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

de degré $\leq n$, et l'approximation correspondante ρ', par la condition que les écarts aux points de E soient entre eux dans un rapport assigné, à savoir celui des nombres

$$u_0, \quad -u_1, \quad +u_2, \quad \ldots, \quad \pm u_{n+1},$$

et soient, de plus, du même signe que ces nombres.

Nous supposons que $u_0, u_1, \ldots,$ sont des nombres positifs ou négatifs de module ≤ 1, mais l'un au moins de module 1. Nous avons placé des signes alternés devant ces nombres pour la commodité des calculs ultérieurs. Si donc ρ' est l'approximation obtenue avec Q sur E, les écarts aux points consécutifs de E sont

$$u_0\rho', \quad -u_1\rho', \quad +u_2\rho', \quad \ldots, \quad \pm u_{n+1}\rho'.$$

Dans ce cas, ρ' et les $n+1$ coefficients a de Q sont déterminés

par le système de $n+2$ équations linéaires

$$
\begin{aligned}
f_0 &= +u_0\rho' + a_0 + a_1x_0 + \dots + a_n x_0^n \\
f_1 &= -u_1\rho' + a_0 + a_1x_1 + \dots + a_n x_1^n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_{n+1} &= \pm u_{n+1}\rho' + a_0 + a_1x_{n+1} + \dots + a_n x_n^n
\end{aligned}
$$

ayant pour déterminant

$$
D = \begin{vmatrix} +u_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots \\ -u_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots \\ +u_2 & 1 & x_2 & x_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.
$$

Désignons par A_0, $-A_1$, $+A_2$, ..., les mineu éléments de la première colonne. Ce sont des dé Vandermonde tous positifs, car on a

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})\dots(x_2 - x_1 \\
A_1 &= (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})\dots(x_2 - x_0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

et toutes ces différences sont positives. Il vient ainsi

$$D = u_0A_0 + u_1A_1 + \dots + u_{n+1}A_{n+1}.$$

Résolvons maintenant le système par rapport à ρ' :

$$
(1) \qquad \rho' = \frac{f_0A_0 + f_1A_1 + \dots + f_{n+1}A_{n+1}}{u_0A_0 + u_1A_1 + \dots + u_{n+1}A_{n+1}}.
$$

Le système admet une solution bien déterminée, les u seraient choisis de manière à annuler D. Ceci nement pas lieu si les u sont de même signe.

Si le numérateur de l'expression de ρ' est nul, et nulent pas D (donc s'ils sont de même signe), on a

$$\rho' = 0.$$

Le polynome Q représente exactement f dans l'approximation est nulle et Q se confond avec le p proximation minimum. Un autre polynome de deg nécessairement sur E des écarts liés par la relation D

Supposons maintenant que le numérateur ne L'expression (1) de ρ' montre qu'on minime ρ' e

tous les u de même signe (donc celui du numérateur) et en leur donnant la valeur absolue maximum 1. Donc l'approximation minimum sur E est donnée par la formule

$$(2) \qquad \rho = \frac{|A_0 f_0 - A_1 f_1 + \ldots \pm A_{n+1} f_{n+1}|}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}}.$$

Alors le polynome d'approximation sur E est entièrement déterminé, car on connaît ses valeurs aux $2n+2$ points de E. D'après le calcul qui précède, ce polynome est entièrement caractérisé par la propriété de fournir des écarts égaux et de signes contraires en deux points consécutifs de E.

Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant :

Il existe un polynome P *d'ordre* $\leqq n$ *et un seul qui est d'approximation minimum sur* E. *Ce polynome fournit des écarts de même valeur absolue et de signes contraires en deux points consécutifs de* E *et cette propriété le caractérise. Il n'y a d'exception que si la représentation est exacte et l'approximation nulle.*

59. **Théorème.** — *Si $f(x)$ admet dans l'intervalle (a, b) une dérivée $(n+1)^{ième}$ continue et de module* $<$ M *et que sa meilleure approximation sur l'ensemble* E_0 *formé de* $n+2$ *points* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ *de cet intervalle soit* ρ_0, *alors le plus petit écart* δ *de deux points de* E_0 *satisfait à la condition*

$$\delta > \frac{(n+1)!}{(b-a)^n} \frac{2\rho_0}{M}.$$

Transformons l'expression (2) de ρ_0. Soient ϖ le produit de toutes les distances de deux points de E, ϖ_k celui des seules distances de x_k aux autres points. On a

$$A_k = \varpi : \varpi_k,$$

d'où

$$\rho_0 = \frac{\left|\frac{f(x_0)}{\varpi_0} - \frac{f(x_1)}{\varpi_1} + \ldots \pm \frac{f(x_{n+1})}{\varpi_{n+1}}\right|}{\frac{1}{\varpi_0} + \frac{1}{\varpi_1} + \ldots + \frac{1}{\varpi_{n+1}}}.$$

Supposons $x_0 < x_1 < x_2 \ldots$. L'approximation de $f(x)$ est la même que celle de $f(x) - f(x_0)$. Substituons cette fonction

à $f(x)$ dans la formule précédente et supprimon[s] ... terme du dénominateur, ce qui augmente le quotien[t] ...

$$\rho_0 < \frac{\left| \frac{f(x_1)-f(x_0)}{\varpi_1} \cdots \frac{f(x_{n+1})-f(x_0)}{\varpi_{n+1}} \right|}{\frac{1}{\varpi_1}+\frac{1}{\varpi_2}+\cdots+\frac{1}{\varpi_{n+1}}}$$

Soit $E_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ l'ensemble obtenu en s[upprimant le] premier point de E_0. Désignons par $\varpi'_1, \varpi'_2, \ldots,$ le[s pro]duits de distances de deux points de E_1 et posons

$$f_1(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

En observant que $x_i - x_0$ est de même signe et ... tour les indices i, la formule précédente peut s'écrir[e]

$$\rho_0 < \frac{\left| \frac{f_1(x_1)}{\varpi'_1} \cdots \frac{f_1(x_{n+1})}{\varpi'_{n+1}} \right|}{\left| \frac{1}{(x_1-x_0)\varpi'_1} \cdots \frac{1}{(x_{n+1}-x_0)\varpi'_{n+1}} \right|} < (b-a)\frac{\left| \frac{f_1(x_1)}{\varpi'_1} \cdots \frac{f_1(x_{n+1})}{\varpi'_{n+1}} \right|}{\frac{1}{\varpi'_1}+\cdots+\frac{1}{\varpi'_{n+1}}},$$

ou, plus simplement, en désignant par ρ_1 la meill[eure approxi]mation d'ordre $n-1$ de f_1 sur E_1,

$$\rho_0 < (b-a)\rho_1.$$

Il y a là un procédé de réduction qu'on peu[t] ...
Posons, en général,

$$f_k(x) = \frac{f_{k-1}(x) - f_{k-1}(x_{k-1})}{x - x_{k-1}},$$

et soit ρ_k la meilleure approximation d'ordre $n-k$ ... l'ensemble $E_k(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})$, nous avons, p[our] ... $2, \ldots, n$,

$$\rho_k < (b-a)\rho_{k+1}$$

et, par conséquent, de proche en proche, ...

Ici ρ_n est la meilleure approximation d'ordre o de f_n sur l'ensemble de deux points seulement $E_n(x_n, x_{n+1})$; nous avons donc immédiatement

$$\rho_n = \frac{1}{2}\,|f_n(x_{n+1}) - f_n(x_n)|.$$

Soit, en général, M_k^r le module maximum de $f_k^{(r)}$ sur (a, b); nous avons

$$\rho_n < \frac{1}{2}\,(x_{n+1} - x_n) M_n^1$$

et, par conséquent,

$$\rho_0 < (x_{n+1} - x_n)\,\frac{1}{2}\,(b-a)^n M_n^1.$$

Évaluons maintenant M_k^r. Nous avons

$$f_k(x + x_{k-1}) = \frac{f_{k-1}(x + x_{k-1}) - f_{k-1}(x_{k-1})}{x} = \int_0^1 f'_{k-1}(x_{k-1} + ux)\,du,$$

$$f_k^{(r)}(x + x_{k-1}) = \int_0^1 f_{k-1}^{(r+1)}(x_{k-1} + ux)\,u^r\,du.$$

Nous en concluons, par le théorème de la moyenne,

$$M_k^r < M_{k-1}^{r+1}\int_0^1 u^r\,du = \frac{1}{r+1}\,M_{k-1}^{r+1};$$

puis, de proche en proche,

$$M_n^1 < \frac{M_{n-1}^2}{2} < \frac{M_{n-2}^3}{2.3} < \ldots < \frac{M_0^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{(n+1)!}.$$

Finalement, si nous portons cette dernière valeur dans la borne assignée à ρ_0, nous obtenons

$$\rho_0 < (x_{n+1} - x_n)\,\frac{(b-a)^n M}{2(n+1)!}.$$

Dans ce calcul, nous avons fait la réduction des ensembles E_0, E_1, E_2, ... en supprimant chaque fois le point extrême sur la gauche. Nous pourrions tout aussi bien supprimer le point extrême sur la droite et même tantôt celui de gauche, tantôt celui de droite. Si la suppression porte d'abord i fois sur la gauche, ensuite $n-i$ fois sur la droite, nous obtiendrons, quel que soit l'indice i,

$$\rho_0 < (x_{i+1} - x_i)\,\frac{(b-a)^n M}{2(n+1)!},$$

ce qui revient au théorème énoncé.

60. Corollaire. — *Si $f(x)$ est continue dans l'in*
si, d'autre part, pour l'ordre n, ρ est la meilleu
tion de $f(x)$ sur l'ensemble E, formé de $n+2$ p
on peut en conclure une borne inférieure de l'
points de E, pourvu que ρ soit >0.

En effet, soit ε un nombre positif donné <1. N
struire un polynome Q tel qu'on ait, sur tout $(a, b$

$$|f-Q| < \varepsilon\rho.$$

La meilleure approximation d'ordre n de Q sur E

$$\rho_0 > \rho(1-\varepsilon).$$

Alors, en vertu du théorème précédent, le plus p
deux points de E est supérieur à

$$\frac{2(n+1)!}{(b-a)^n M}\rho(1-\varepsilon),$$

où M est le module maximum de $Q^{(n+1)}$.

61. Théorème. — *Soient $f(x)$ une fonction*
(a, b), E un ensemble de $n+2$ points de E, P l
degré n qui donne la meilleure approximation
approximation. A tout nombre positif donné η,
nombre positif ε qui jouit de la propriété sui
polynome Q de degré n donne sur E une appro

$$\rho' < \rho(1+\varepsilon),$$

on aura, dans l'intervalle (a, b),

$$|P-Q| < \eta.$$

Si $\rho = 0$, on a aussi $\rho' = 0$; donc P et Q, coïnci
identiques.

Supposons ρ différent de 0. Nous pouvons dési
de Q aux points successifs de E par

$$\pm u_1\rho', \quad \mp u_2\rho', \quad \ldots,$$

où le signe ambigu est celui de l'écart de P. Subst
leurs valeurs (1) et (2) dans la condition $\rho' <$

devient

$$A_0 u_0 + A_1 u_1 + \ldots + A_{n+1} u_{n+1} > \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}}{1+\varepsilon},$$

d'où

$$A_0(1-u_0) + A_1(1-u_1) + \ldots < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(A_0 + A_1 + \ldots);$$

et, par conséquent, quel que soit k,

$$1 - u_k < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{A_0 + A_1 + \ldots}{A_k}.$$

On peut, en prenant ε suffisamment petit, rendre u_k (qui est $\leqq 1$) aussi voisin qu'on veut de 1, donc rendre l'écart de Q au point x_k aussi voisin qu'on veut de celui de P. Ainsi Q peut être rendu aussi voisin qu'on veut de P sur E, donc sur (a, b), et Q peut être astreint à vérifier l'inégalité $|P - Q| < \eta$.

Remarque. — On peut appliquer le théorème précédent quand l'ensemble E varie d'une certaine manière dans (a, b). Le nombre ε (qui dépend de η) peut alors dépendre du choix des points de E. Mais on pourra le prendre indépendant de E, si l'écart de deux points de E ne peut pas tendre vers zéro. En effet, $A_1, A_2, \ldots$ ne tendent pas vers zéro non plus, $1 - u_k$ tend uniformément vers zéro avec ε et Q tend uniformément vers P sur E et, par conséquent, aussi sur (a, b). Cette condition sera certainement remplie, en vertu du corollaire précédent, si l'on sait que ρ reste supérieur à un nombre positif assigné quand E varie.

62. Théorème. — *Si un polynome Q de degré $\leqq n$ fournit sur $E(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ des écarts de signes alternés, dont les valeurs absolues (non toutes égales) sont*

$$r_0, \quad r_1, \quad \ldots, \quad r_{n+1},$$

la meilleure approximation sur E est comprise entre la plus petite et la plus grande de ces valeurs absolues, limites exclues.

La meilleure approximation de la fonction f est la même que celle de $f - Q$, à savoir

$$\rho = \frac{A_1 r_0 + A_1 r_1 + \ldots + A_{n+1} r_{n+1}}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}},$$

63. Meilleure approximation d'ordre n sur un en
de $n+2$ points. — *La meilleure approximation*
un ensemble fini F *de plus de $n+2$ points, es*
ensemble de $n+2$ points de F, *choisis de man*
meilleure approximation soit la plus grande pos

Soient E un ensemble de $n+2$ points, $x_0, x_1, \ldots$
partie de F et satisfaisant à cette condition ; P le pol
la meilleure approximation, ρ, sur E. Je dis que P
approximation ρ sur F.

En effet, dans le cas contraire, il existerait au m
de F où l'écart $f-P$ serait de module $>\rho$. Si
deux points consécutifs de E, x_0 et x_1 par exemp
même signe qu'au point ξ, soit en x_0, soit en x
en x_1. Alors, en vertu du théorème précédent,
approximation sur $(x_0, \xi, x_2, \ldots, x_{n+1})$ est plus
contrairement à l'hypothèse.

Si ξ est extérieur à l'intervalle (x_0, x_{n+1}), par e
on considérera l'un des deux ensembles de $n+2$ p

$$(\xi, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \quad (\xi, x_0, x_1, \ldots, x_n$$

selon que $f-P$ prend le même signe ou des signes
et en x_0. On sera conduit à la même conclusion.

64. Théorème. — *La meilleure approximation*
la fonction continue $f(x)$ dans un intervalle $(a,$
un ensemble de $n+2$ points de cet intervalle, c
nière que cette meilleure approximation soit la
possible.

La meilleure approximation ρ_1 sur un ensemble

$$E_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$$

de $n+2$ points de (a, b) est donnée par la formul
Celle-ci met en évidence que ρ_1 est une fonction c
$x_1, \ldots, x_{n+1}$ dans (a, b). Cette fonction admet donc
et l'atteint pour un ensemble déterminé E conten
Alors on montre, par un raisonnement identique

précédente, que ρ est aussi l'approximation minimum ... b).

... ainsi démontré l'existence du polynome d'approximation minimum et retrouvé ses propriétés essentielles par une ... différente de celle utilisée au début du chapitre (n^{os} 55 ...

...me. — *Soit $f(x)$ une fonction continue dans (a, b) ... polynome de degré $\leq n$ qui en donne la meilleure approximation ... A tout nombre positif η correspond un nombre ... jouit de la propriété suivante : Si un polynome Q ... donne sur (a, b) une approximation*

$$\rho' < (1+\varepsilon)\rho,$$

...s l'intervalle (a, b),

$$|P - Q| < \eta.$$

... ρ est la meilleure approximation sur un certain ... de $2n+2$ points et elle est fournie par P. Or Q ... E, l'approximation ρ'. Ce théorème revient donc à ... 1.

... approché du polynome d'approximation minimum. — ... une fonction continue dans un intervalle (a, b). Il ... déterminer, avec une approximation donnée η, le polynome de degré $\leq n$ qui en donne la meilleure approximation ρ. Il ... un procédé qui ait un caractère pratique pour résoudre ... Mais nous allons montrer que *théoriquement* sa solution ... d'un nombre fini d'opérations, qu'on peut délimiter ...

... posons que $f(x)$ n'est pas un polynome de degré $\leq n$. ... Commençons par déterminer une borne inférieure, ρ_0, ... meilleure approximation dans (a, b). Nous utiliserons à cet ... les règles données précédemment.

... polynome inconnu de degré $\leq n$ qui fournit la meilleure ... approximation ρ dans (a, b). C'est aussi celui d'approximation ... sur un certain ensemble E (n° 64) de $n+2$ points ... inconnus. Le théorème du n° 60 nous permet de

déterminer une borne inférieure δ de l'écart de deu
Cette borne fixée, nous pouvons, sans connaître
d'après la remarque du n° 61, faire correspondre
un nombre ε tel que, si un polynome Q donne sur E
mation $<(1+\varepsilon)\rho$, on ait $|P - Q| < \eta$.

Soit M le module maximum de f dans (a, b). Part
en n parties égales. La formule de Lagrange permet
module de continuité uniforme à un polynome Q, de
le module ne surpasse pas 2M sur l'ensemble des n
subdivision. Nous pouvons donc, en prenant l'entier
diviser (a, b) en λn parties assez petites pour que
de $f - Q$ soit $< \varepsilon\rho_0$ dans chacune d'elles.

Ayant divisé (a, b) en λn parties satisfaisant à cet
désignons par F l'ensemble des points de subdivision
pris) et soit Q le polynome d'approximation mini
lequel est de module $<$ 2M et vérifie les conditions
Ce polynome Q se détermine par un nombre limité
car il donne la meilleure approximation sur n
choisis de manière à rendre cette meilleure ap
maximum, et il n'y a qu'un nombre limité de choix.
répond à la question et qu'on a $|Q - P| < \eta$.

En effet, Q donne sur F une approximation $\leq \rho$; m
de E tombe entre deux points consécutifs de F, e
l'oscillation de $f - Q$ est $< \varepsilon\rho_0$. Donc Q donne,
approximation $< \rho + \varepsilon\rho_0 < (1 + \varepsilon)\rho$, ce qui prou
sition.

**67. Détermination analytique du polynome d'appro
nimum.** — Soient $f(x)$ une fonction admettant une
tinue $f'(x)$, et

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

le polynome qui en donne la meilleure approxima
l'intervalle (a, b). Soit

$$E(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$$

l'ensemble de $n+2$ points de (a, b) sur lequel P
même meilleure approximation ρ. Supposons d'ab
points différents de a et de b. Alors $f(x) - P(x)$ e

mum en chacun des points de E et nous avons le système de $2n+2$ équations

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x_i) - P(x_i) \pm \rho = 0 \\ \quad f'(x_i) - P'(x_i) = 0 \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1),$$

qui peut servir à déterminer les $2n+2$ inconnues du problème : x_0, $x_1, \ldots, x_{n+1}$; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et ρ.

Si E contenait un des points a, b ou tous les deux, cela ferait une ou deux inconnues en moins, mais, en même temps, une ou deux équations seraient à supprimer dans la seconde série. Le problème est donc généralement déterminé.

Si $f(x)$ est un polynome, le système (1) est algébrique. Il peut, comme dans le cas général, admettre un nombre plus ou moins grand de solutions. Mais il n'y en a qu'une seule qui minime ρ, et c'est celle qui répond à la question. Lorsque le système (1) est algébrique, on peut, pour le résoudre, employer toutes les méthodes particulières d'approximation propres à ce cas.

Le cas général peut être ramené au précédent, comme M. Borel l'a déjà fait observer [1]. En effet, soit R un polynome voisin de f. Soient P le polynome qui donne la meilleure approximation ρ de f, Q celui qui donne la meilleure approximation ρ' de R. Je dis que $|P - Q|$ peut être rendu aussi petit qu'on veut avec $|f - R|$. En effet, si $|f - R|$ est $< \varepsilon$ sur (a, b), Q donne de f une approximation $< \rho + \varepsilon$ sur (a, b) et, en particulier, sur l'ensemble E où P est d'approximation ρ, donc Q est aussi voisin qu'on veut de P (n° 61).

Il suit de là que le calcul approché de P se ramène à celui de la meilleure approximation d'un polynome R suffisamment voisin de f, c'est-à-dire au calcul précédent.

M. Bernstein a fait connaître un théorème qui peut être utile dans la question qui nous occupe, et que nous allons exposer.

68. Théorème de M. Bernstein. — Nous savons que l'approximation minimum sur (a, b) est la même que sur un certain ensemble E de $n+2$ points, mais il peut y avoir plusieurs ensembles vérifiant cette condition. Nous supposerons, dans ce

qui suit, que cet ensemble est unique. Nous disting
quatre cas suivants : E est de la première classe s'il
ni a ni b, de la seconde s'il contient a seul, de la tr
contient b seul, de la quatrième s'il contient a et b. V
tenant le théorème de M. Bernstein [1] :

Théorème. — *Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions a*
régulières sur le segment ab, λ un paramètre ($0 \leqq \lambda \leqq$

$$f(x, \lambda) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\psi(x).$$

Désignons par $P(x, \lambda)$ le polynome d'approximation
de $f(x, \lambda)$ sur (a, b), par E_λ l'ensemble sur lequel
mation est précisément l'approximation minimu
l'ensemble E_λ est unique et appartient toujours
classe quel que soit λ; si, en outre, la dérivée sec
fonction

$$F(x) = f(x, \lambda) - P(x, \lambda)$$

ne s'annule en aucun point de E_λ, alors les $2n+2$
du problème, à savoir $\rho(\lambda)$, les $n+2$ points x_i et les
ficients a_k sont des fonctions analytiques régulières
segment 01.

Supposons, pour fixer les idées, que E_λ soit toujour
mière classe. Alors les $2n+2$ inconnues sont détermi
système (1),

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} F(x_i) \pm \rho &= 0 \\ F'(x_i) &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1).$$

Formons son jacobien, qui est d'ordre $2n+2$. Ses
mières lignes sont respectivement ($i = 0, 1, 2, \ldots, n+$

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_{n+1}}, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial a_0}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F(x}{\partial a_n}$$

se réduisant à

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad F'(x_i), \quad \ldots, \quad 0, \quad 1, \quad x_i, \quad x_i^2, \quad \ldots, \quad x_i^n,$$

---

[1] M. Bernstein formule un énoncé plus général qui s'étend aux
exposants non entiers (*Sur la meilleure approximation des fon*
nues).

Les $n+1$ dernières lignes sont ($k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$)

$$\frac{\partial F'(x_k)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial x_{n+1}}, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial a_0}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial a_n}, \quad 0,$$

se réduisant à

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad F''(x_i), \quad \ldots, \quad 0, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial a_0}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial a_n}, \quad 0.$$

Ce jacobien est donc

$$J = F''(x_0)\ldots F''(x_{n+1}) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n & +1 \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n & -1 \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^n & +1 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Nous savons que ce déterminant est différent de zéro, car c'est celui dont dépend le calcul de la meilleure approximation sur l'ensemble E. Donc J ne s'annule pas, si les facteurs $F''(x_k)$ ne s'annulent pas. Le théorème est ainsi établi.

Voici maintenant comment le théorème de M. Bernstein s'applique au calcul de la meilleure approximation d'une fonction analytique donnée $\varphi(x)$, dans l'intervalle (a, b).

On suppose que l'on connaisse la meilleure approximation $\rho(0)$ d'une fonction analytique $\psi(x)$, voisine de $\varphi(x)$, ainsi que le polynome $P(x, 0)$ et l'ensemble E_0 correspondants. On forme la fonction

$$f(x) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\psi(x),$$

qui devra satisfaire aux conditions du théorème précédent. On connaît donc, par hypothèses, les valeurs initiales (pour $\lambda = 0$) des $2n+2$ inconnues du problème, ρ, a_i, x_k, et il s'agit d'en trouver les valeurs pour $\lambda = 1$, auquel cas $f(x) = \varphi(x)$.

On remarque que les valeurs initiales des dérivées des ordres successifs de ρ, a_i, x_k par rapport à λ, s'obtiennent, de proche en proche, en dérivant successivement les équations (1) par rapport à λ et posant chaque fois $\lambda = 0$. Les dérivées d'un même ordre s'obtiennent par la résolution d'un système linéaire dont le déterminant J est toujours le même. On peut donc écrire les développements de ρ, a_i, x_k suivant les puissances de λ par la formule de Maclaurin. Si ces développements convergent pour $\lambda = 1$, le problème est résolu. Dans le cas contraire, on connaît un élément analytique de chacune des fonctions ρ, a_i, x_k; ce qui suffit théoriquement pour les déterminer entièrement.

Si la fonction $\psi(x)$ est bien choisie, les développe
Maclaurin seront rapidement convergents, mais il est
c'est un tel choix qui fait toute la difficulté de la questi

M. Bernstein a fait la remarque que voici :

Les expressions approchées de P *et de* ρ, *pour* $\lambda =$
obtient en bornant la série de Maclaurin à ses deux
termes, sont respectivement le polynome d'appro
minimum et l'approximation minimum de $\varphi(x)$
semble E_0.

Pour le montrer, dérivons une première fois les $n+1$
équations du système (1), en observant que $F'(x_i)$ c
vient ($i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$)

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial\lambda} \pm \rho'(\lambda) = \varphi(x_i) - \psi(x_i) - \frac{\delta P(x_i)}{\delta\lambda} \pm \rho'(\lambda) =$$

mais la caractéristique δ indique une dérivation dans la
coefficients a seuls sont considérés comme dépendant
sons $\lambda = 0$; il vient, x_i appartenant à E_0,

$$\varphi(x_i) - \psi(x_i) - \frac{\delta P(x_i, 0)}{\delta\lambda} \pm \rho'(0) = 0.$$

D'autre part, on a, par hypothèse, sur l'ensemble E_0,

$$\psi(x_i) - P(x_i, 0) \pm \rho(0) = 0;$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\varphi(x_i) - \left[P(x_i, 0) + \frac{\delta P(x_i, 0)}{\delta\lambda}\right] \pm [\rho(0) + \rho'(0)] =$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n+1).$$

Ces équations, relatives à E_0, mettent en évidence qu

$$P(x) + \frac{\partial P(x)}{\partial\lambda}$$

est le polynome d'approximation minimum de $\varphi(x)$
semble E_0 et que cette approximation est $\rho(0) + \rho'(0)$
théorème énoncé. Il s'ensuit évidemment que l'on a

$$\rho(1) \gtreqless \rho(0) + \rho'(0).$$

Cette dernière remarque est encore due à M. Bernstein.

CHAPITRE VII.

APPROXIMATION TRIGONOMÉTRIQUE MINIMUM.

69. **Propriétés des expressions trigonométriques d'ordre n.** — Les théorèmes relatifs aux polynomes d'approximation minimum s'étendent aux expressions trigonométriques et se démontrent de la même manière. Mais il faut, au préalable, étendre aux expressions trigonométriques les propriétés algébriques des polynomes sur lesquelles reposent les démonstrations. Voici ces propriétés :

1° *Une expression trigonométrique d'ordre* $\overline{\gtrless} n$ *ne peut avoir plus de* $2n$ *racines non équivalentes, et cela en tenant compte de l'ordre de multiplicité des racines.*

Cette propriété a été démontrée au n° 30.

2° *Deux expressions d'ordres* $\overline{\gtrless} n$ *qui coïncident en* $2n+1$ *points non équivalents sont identiques. Autrement dit, une expression trigonométrique d'ordre* $\overline{\gtrless} n$ *est déterminée par ses valeurs en* $2n+1$ *points non équivalents.*

En effet, leur différence, ayant $2n+1$ racines, est identiquement nulle.

3° *Deux expressions d'ordres* $\overline{\gtrless} n$ *qui ont* $2n$ *racines non équivalentes communes sont les mêmes à un facteur constant près.*

En effet, soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux expressions d'ordre $\overline{\gtrless} n$ ayant $2n$ racines communes et ne s'annulant pas au point a; la différence

$$P(x)Q(a) - Q(x)P(a)$$

admet les mêmes racines et une de plus a, en tout $2n+1$ racines, donc elle est identiquement nulle.

4° *On peut toujours construire une expressio*
trique d'ordre n qui admet 2n racines arbitrairem

S'il n'y a que deux racines x_1 et x_2, l'expressio
ordre

$$\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x_1-x_2}{2} - \cos\left(x - \frac{x\ldots}{}\right.\right.$$

satisfait à la question.

Si x_1 et x_2 ne sont pas équivalents, ces racines s
l'expression change de signe quand x passe par ces v

S'il y a $2n$ racines données $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, le
nombre pair de facteurs

$$\prod_i \sin\frac{x-x_i}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n)$$

est une expression entière et répond encore à la ques

5° *Une expression d'ordre n peut se determ*
$2n+1$ valeurs arbitrairement donnees qu'ell
$2n+1$ points non équivalents, et elle s'exprime
mule analogue à celle de Lagrange.

Désignons les points par $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ et soit f
assignée au point x_i. Formons l'expression (celle-ci
car le nombre des facteurs est impair)

$$S(x) = \prod_i \sin\frac{x-x_i}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n$$

l'expression entière d'ordre n,

$$S(x)\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{2\sin\frac{x-x_i}{2}}\,\frac{f(x_i)}{S'(x_i)}$$

répond à la question et remplace la formule de Lagra
Cette nouvelle formule conduit, de la même manière
sions suivantes :

6° *Deux expressions d'ordre n qui prennent*
infiniment voisines en $2n+1$ points donnés, non
sont infiniment voisines.

7° *Une expression d'ordre $\overline{\gtrless} n$, dont les coefficients sont variables, mais qui est bornée sur un ensemble de $2n+1$ points donnés, non équivalents, a tous ses coefficients bornés.*

70. Expression trigonométrique d'approximation minimum. — L'expression trigonométrique qui donne l'approximation minimum d'une fonction périodique $f(x)$ pour toutes les valeurs réelles de x, possède des propriétés analogues à celles du polynome d'approximation minimum. La généralisation des définitions et de la plupart des démonstrations est immédiate. Il suffira d'énoncer les théorèmes, quand les démonstrations pourront se calquer sur les précédentes. Voici les principaux de ces théorèmes :

1° *Il existe, pour chaque ordre n, une expression trigonométrique d'approximation minimum.*

2° *Si l'expression $\mathrm{T}(x)$ d'ordre $\overline{\gtrless} n$ est d'approximation minimum pour la fonction périodique $f(x)$, on peut assigner $2n+2$ points, contenus à l'intérieur d'une même période d'amplitude 2π, où l'écart $f-\mathrm{T}$ atteint ses valeurs extrêmes $\pm\rho$ avec alternance de signes d'un point au suivant.*

Il faut ici préciser quelques points de la démonstration.

Divisons une période, c'est-à-dire un intervalle donné d'amplitude 2π, en intervalles assez petits pour que l'écart $\varphi(x)=f-\mathrm{T}$ ne s'annule dans aucun des intervalles, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$, où il atteint ses valeurs extrêmes. Désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ les unités du signe de $\varphi(x)$ dans chacun de ces intervalles. Soit δ_{m+1} l'intervalle congru à δ_1 dans la période suivante, et $\varepsilon_{m+1}=\varepsilon_1$ l'unité du signe de $\varphi(x)$ dans δ_{m+1}. Le théorème énoncé revient à dire que la suite

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_m, \quad \varepsilon_{m+1}=\varepsilon_1$$

contient $2n+2$ variations de signes. D'ailleurs, les termes extrêmes étant les mêmes, elle ne peut en contenir qu'un nombre pair.

Supposons, par impossible, que la suite ne contienne que $2k \overline{\gtrless} 2n$ variations. Soit $\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}$ l'une quelconque d'entre elles. Assignons un point ξ intermédiaire entre les deux intervalles correspondants δ_i et δ_{i+1}, qui sont nécessairement non contigus.

Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2k}$ la suite des $2k$ points ainsi chois tous intérieurs à la période. La fonction entière d'or

$$\psi(x) = \varepsilon_1 \sin\frac{\xi_1 - x}{2} \sin\frac{\xi_2 - x}{2} \cdots \sin\frac{\xi_{2k} - x}{2}$$

aura le signe de φ dans chaque intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots$ résulte, comme dans le cas des polynomes d'approx l'expression d'ordre $\leq n$, $T + \varepsilon\psi$, donnerait une a meilleure que T, à condition de donner au nombre valeur suffisamment petite.

3° *L'expression d'ordre $\leq n$ qui donne la meille mation de $f(x)$ est unique.*

4° *La propriété 2° est caractéristique : une ex fournit des écarts de signes alternés et de mo l'approximation correspondante en $2n+2$ points contenus à l'intérieur d'une période, n'est autre que d'approximation minimum.*

71. **Borne inférieure de la meilleure approximatio trique.** — A la règle du n° 57 pour les polynomes c règle suivante pour la représentation trigonométrique

Soient $f(x)$ une fonction de période 2π et S un trigonométrique d'ordre n. Si $f - S$ prend, ave alternés, des valeurs absolues $\geq \rho'$ en $2n+2$ points et non équivalents d'une même période, alors ρ' es inférieure de l'approximation minimum.

72. **Meilleure approximation d'ordre n sur un e $2n+2$ points.** — Les résultats obtenus dans le Cha dent, quant à la représentation par polynomes sur de points, s'étendent à la représentation trigonométri

Une expression trigonométrique d'ordre n peut ét la forme

$$R(x) = \sum_{-n}^{n} a_k e^{kix},$$

avec la condition que les coefficients a_k et a_{-k} soient naires conjuguées pour que R soit réel.

Considérons un ensemble E de $2n+2$ points,

$$(\mathrm{E}) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+1} < x_{2n+2},$$

non équivalents et contenus dans une même période 2π. Soit $f(x)$ une fonction; nous allons prouver que, parmi les expressions $\mathrm{R}(x)$ d'ordre $\leq n$, il en est une $\mathrm{T}(x)$ qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ sur l'ensemble E. Cette expression T est dite d'approximation minimum sur E, et nous montrerons qu'elle est unique.

Proposons-nous d'abord le problème plus général de déterminer $\mathrm{R}(x)$ et l'approximation correspondante ρ' sur E, par la condition que les $2n+2$ écarts aux points successifs de E soient de mêmes signes et dans le même rapport que les $2n+2$ nombres donnés

$$u_1, \quad -u_2, \quad +u_3, \quad \ldots, \quad -u_{2n+2}.$$

Les lettres u désignent des nombres positifs ou négatifs de modules ≤ 1, mais l'un au moins de module 1. Ils sont précédés d'un signe alternatif pour la commodité des calculs ultérieurs.

Nous avons donc à déterminer ρ' et les $2n+1$ coefficients a de $\mathrm{R}(x)$ par les $2n+2$ équations linéaires

$$f(x_m) = \pm u_m \rho' + \sum_{k=-n}^{n} a'_k e^{k x_m i} \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2n+2).$$

Ce système a pour déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} +u_1 & e^{-n x_1 i} & e^{-(n-1) x_1 i} & \ldots & e^{n x_1 i} \\ -u_2 & e^{-n x_2 i} & e^{-(n-1) x_2 i} & \ldots & e^{n x_2 i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Soient A_1, $-\mathrm{A}_2$, $+\mathrm{A}_3$, ... les mineurs relatifs aux éléments de la première colonne. Nous avons

$$\mathrm{D} = \mathrm{A}_1 u_1 + \mathrm{A}_2 u_2 + \ldots + \mathrm{A}_{2n+2} u_{2n+2}.$$

Calculons le coefficient A_k. Nous avons, en excluant la lettre x_k,

$$\mathrm{A}_k = \begin{vmatrix} e^{-n x_1 i} & e^{-(n-1) x_1 i} & \ldots & e^{n x_1 i} \\ e^{-n x_2 i} & e^{-(n-1) x_2 i} & \ldots & e^{n x_2 i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

Désignons par $\prod_k$ un produit qui s'étend à toutes
sons de deux indices λ, μ différents de k avec la con
Il vient

$$A_k = e^{-n(x_1+x_2+\ldots)i} \prod_k (e^{x_\lambda i} - e^{x_\mu i})$$
$$= \prod_k e^{-\frac{x_\lambda + x_\mu}{2} i} (e^{x_\lambda i} - e^{x_\mu i})$$
$$= \prod_k 2i \sin\frac{x_\lambda - x_\mu}{2}.$$

Désignons encore par ω le nombre des facteurs du
(nombre qui est indépendant de k), nous obtenons

$$A_k = (2i)^\omega A'_k,$$
$$A'_k = \prod_k \sin\frac{x_\lambda - x_\mu}{2}.$$

Tous les facteurs étant positifs, A'_k est un nombre r
Résolvons maintenant le système par rapport à ρ' :

$$\rho' = \frac{A_1 f(x_1) - A_2 f(x_2) + \ldots \quad A_{2n+2} f(x_{2n+2})}{A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{2n+2} u_{2n+2}}$$

et, en supprimant le facteur commun $(2i)^\omega$,

(1) $$\rho' = \frac{A'_1 f(x_1) - A'_2 f(x_2) + \ldots \quad A'_{2n+2} f(x_{2n+2})}{A'_1 u_1 + A'_2 u_2 + \ldots + A'_{2n+2} u_{2n+2}}$$

Les quantités A' sont réelles, positives et non nul
mule, entièrement analogue à la formule (1) du n°
les polynomes, conduit aux mêmes conséquences.

L'approximation minimum se réalise en faisant t
à ± 1 et du même signe que le numérateur de (1)
tion minimum ρ sur E sera donnée par la formule

(2) $$\rho = \frac{|A'_1 f(x_1) - A'_2 f(x_2) + \ldots \quad A'_{2n+2} f(x_{2n+2})}{A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_{2n+2}}$$

Ces formules conduisent, comme dans le cas d
aux théorèmes suivants :

1° *Il existe une expression d'ordre n et une*
la meilleure approximation sur un ensemble E de
elle fournit des écarts de même module et de sig

en deux points consécutifs de E, *et cette propriété la caractérise.*

2° *L'expression d'ordre* $\leqq n$ *qui donne la meilleure approximation sur un ensemble* F *de plus de* $2n+2$ *points* [*ou dans un intervalle* (a, b)], *est celle qui donne la meilleure approximation sur* $2n+2$ *points de* F [*ou de* (a, b)], *choisis de manière que cette meilleure approximation soit la plus grande possible.*

73. Théorème. — *Supposons que* $f(z)$, *de période* 2π, *soit une fonction analytique de* $z = x + yi$, *holomorphe dans la bande comprise entre les deux horizontales* $y = \pm b$, *et de module* $\leqq$ M *sur ces droites; alors si* f *a pour meilleure approximation* ρ_0 *sur un ensemble* E_0 *de* $2n+2$ *points réels non équivalents, le plus petit écart* δ *de deux de ces points vérifie la condition*

$$\delta > \rho_0 \frac{16}{M}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{b}{2}\right)^{2n+2}.$$

Nous pouvons supposer que les points $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$ de E_0 satisfassent à la condition

$$0 \leqq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2n+2} < 2\pi.$$

Appelons, en abrégé, *distance de deux points* x_i et x_k de E l'expression

$$\left|\sin\frac{x_i - x_k}{2}\right|$$

et désignons par ϖ_k le produit des distances de x_k aux autres points de E. La formule (2) nous donne

$$\rho_0 = \frac{\left|\dfrac{f(x_1)}{\varpi_1} - \dfrac{f(x_2)}{\varpi_2} + \ldots - \dfrac{f(x_{2n+2})}{\varpi_{2n+2}}\right|}{\dfrac{1}{\varpi_1} + \dfrac{1}{\varpi_2} + \ldots + \dfrac{1}{\varpi_{2n+2}}}.$$

Soit E_1 l'ensemble obtenu en supprimant l'un des points extrêmes de E_0, par exemple x_1; posons

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{\ldots}.$$

accentuons les produits relatifs à E_1. Nous avons, co
polynomes (n° 59) et en observant que les sinus
dules $\leqq 1$,

$$\rho_0 \leqq \rho_1 = \frac{\left|\frac{f(x_2)}{\varpi'_2} - \frac{f(x_3)}{\varpi'_3} + \ldots \pm \frac{f(x_{2n+2})}{\varpi'_{2n+2}}\right.}{\frac{1}{\varpi'_2} + \frac{1}{\varpi'_3} + \ldots + \frac{1}{\varpi'_{2n+2}}}$$

Cette fois, le nombre ρ_1, défini par cette formul
meilleure approximation de f_1 sur E_1, parce que l
points de E_1 est impair. Mais cela n'empêche pas
la réduction, parce que ρ_1 ne change pas quand on r
cette formule, $f(x)$ par $f(x) - a$. On a, en effet,

$$\frac{1}{\varpi'_2} - \frac{1}{\varpi'_3} + \ldots \pm \frac{1}{\varpi'_{2n+2}} = 0,$$

parce que cette somme ne diffère que par un facte
développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-(n-1)x_2 i} & e^{-(n-2)x_2 i} & \ldots & e^{nx_2 i} \\ 1 & e^{-(n-1)x_3 i} & e^{-(n-2)x_3 i} & \ldots & e^{nx_3 i} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

suivant les éléments de la première colonne. On s'
des calculs tout pareils à ceux du n° 72. Or ce de
nul, parce que la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne est identique à

Posons donc, en général,

$$f_k(x) = \frac{f_{k-1}(x) - f_{k-1}(x_k)}{\sin\frac{x - x_k}{2}}.$$

Désignons par ρ_k l'expression analogue à ρ_0 et ρ_1,
à l'ensemble $E_k(x_{k+1}, \ldots, x_{2n+2})$, et qui est la meil
mation d'ordre $n - \frac{k}{2}$ de $f_k(x)$ sur E_k lorsque k
avons

$$\rho_k \leqq \rho_{k+1}$$

et, de proche en proche,

$$\rho_0 \leqq \rho_{2n}.$$

Ici ρ_{2n} est la meilleure approximation d'ordre 0 de
semble de deux points seulement $E_{2n}(x_{2n+1}, x_{2n+2}$

donc

$$\rho_{2n} = \frac{1}{2}\,|f_{2n}(x_{2n+2}) - f_{2n}(x_{2n+1})|.$$

Soit, en général, M'_{2n} le module maximum de f'_{2n} *sur l'axe réel;* il vient ainsi

$$\rho_0 < \rho_{2n} < (x_{2n+2} - x_{2n+1})\,\frac{M'_{2n}}{2}.$$

Il faut maintenant évaluer M'_{2n}. Désignons, en général, par M_k le module maximum de f_k *dans la bande* comprise entre les horizontales $y = \pm b$, maximum atteint sur ces droites puisque f_k est holomorphe et périodique. La formule

$$f_k(z + x_k) = \frac{f_{k-1}(z + x_k) - f_{k-1}(x_k)}{\sin\frac{1}{2}z}$$

donne immédiatement

$$M_k < \frac{2M_{k-1}}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}b};$$

d'où, de proche en proche, M désignant M_0,

$$M_{2n} < \left(\frac{2}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}b}\right)^{2n} M.$$

Pour évaluer la dérivée, désignons par C le contour du rectangle compris entre les deux abscisses $x = \pm\pi$ et les deux ordonnées $\pm b$. On a, par la théorie des résidus,

$$f_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f_{2n}(z)\,\frac{1}{2}\cot\frac{z-x}{2}\,dz,$$

$$f'_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f_{2n}(z)\,\frac{dz}{4\sin^2\frac{z-x}{2}}.$$

Mais les intégrales sur les côtés verticaux se détruisent (à cause de la périodicité), les intégrales sur les côtés horizontaux $y = \pm b$ subsistent seules; et il vient, par le théorème de la moyenne,

$$M'_{2n} < 2\,\frac{M_{2n}}{\left(2\operatorname{sh}\frac{b}{2}\right)^2} < \frac{1}{2\operatorname{sh}^2\frac{b}{2}}\left(\frac{2}{\operatorname{sh}\frac{b}{2}}\right)^{2n} M.$$

On porte cette expression dans la borne de ρ_0, il vient

$$\rho_0 < (x_{2n+2} - x_{2n+1}) \left(\frac{2}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}} \right)^{2n+2} \frac{M}{16}.$$

On peut aussi faire la réduction de l'ensemble en retranchant les points sur la droite, ou encore sur les deux extrémités successivement. On a ainsi, quel que soit i,

$$\rho_0 < (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{2}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}} \right)^{2n+2} \frac{M}{16},$$

ce qui revient au théorème énoncé.

74. **Corollaire.** — *Soit $f(x)$ continue et périodique; si sa meilleure approximation d'ordre n est $\rho > 0$ sur un ensemble* E *de $2n+2$ points non équivalents, on peut en conclure une borne inférieure de l'écart de deux points de* E.

En effet, soit ε un nombre positif $< \rho$. Nous pouvons construire une expression trigonométrique S d'un certain ordre, telle qu'on ait, sur l'axe réel,

$$|f - S| < \varepsilon.$$

La meilleure approximation d'ordre n de S sur E est donc

$$\rho_0 > \rho - \varepsilon.$$

Alors, en vertu du théorème précédent, le plus petit écart δ de deux points de E est supérieur à

$$(\rho - \varepsilon) \frac{16}{M} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \right)^{2n+2},$$

où M est le maximum du module de $S(z)$ sur les droites $y = \pm b$. Le choix de b reste arbitraire. On le choisira de manière à rendre cette borne aussi grande que possible.

75. **Détermination de la meilleure approximation d'ordre n.** — La détermination de la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n, sur l'axe réel, d'une fonction périodique donnée $f(x)$

me analogue à celui de la détermination du polynome ion minimum dans un intervalle. Il se résout, au titude assigné, au moyen d'un nombre limité d'opé- on peut fixer *a priori*. La méthode se justifie, comme les polynomes, en s'appuyant sur les théorèmes cor- que nous avons établis ci-dessus. Il est inutile de tte question dans le détail.

s enfin que le théorème de M. Bernstein (n° 68) s'étend, é aucune, à la représentation trigonométrique, et peut mêmes services que dans la recherche du polynome tion minimum. Cette extension n'a pas été faite par n, mais elle ne présente aucune difficulté.

eure approximation sur un ensemble de points équi- Revenons d'abord à la meilleure approximation ρ sur E de $2n+2$ points

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2n+2},$$

ents et intérieurs à une même période, c'est-à-dire à e d'origine arbitraire et d'amplitude 2π.

s par $S(x)$ l'expression entière

$$S(x) = \sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n+2}}{2}$$

produit, étendu à tous les couples d'indices λ, μ, véri- ditions $\mu < \lambda \leq 2n+2$,

$$\prod \sin\frac{x_\lambda - x_\mu}{2};$$

(n° 72)

$$\Delta'_k = \prod_k \sin\frac{x_\lambda - x_\mu}{2} = (-1)^k\frac{H}{S'(x_k)}.$$

le (2), du n° 72, nous donne donc la suivante :

$$\pm\rho = \frac{\dfrac{f(x_1)}{S'(x_1)} + \dfrac{f(x_2)}{S'(x_2)} + \dots + \dfrac{f(x_{2n+2})}{S'(x_{2n+2})}}{\dfrac{1}{S'(x_1)} - \dfrac{1}{S'(x_2)} + \dots - \dfrac{1}{S'(x_{2n+2})}},$$

ore applicable au cas général (que les points soient s ou non).

Arrivons maintenant au cas particulier qui nous intéresse. Supposons que les points de l'ensemble E partagent la période en parties égales, de sorte que l'équidistance des points $x_1, x_2, \ldots$ soit $\frac{\pi}{n+1}$. Dans ce cas, $S(x)$ admet les mêmes racines que la fonction

$$\sin(n+1)(x-x_1)$$

et le rapport des deux fonctions est borné, car on vérifie de suite qu'il tend vers une limite finie quand x tend vers l'infini imaginaire. Donc le rapport des deux fonctions est une constante h et l'on a

$$S(x) = h\sin(n+1)(x-x_1).$$

L'équidistance des points étant $\frac{\pi}{n+1}$, on en conclut

$$S'(x_1) = (n+1)h, \qquad S'(x_2) = -(n+1)h, \qquad \ldots$$

Ces valeurs sont de même module et de signes alternes. La valeur de la meilleure approximation ρ se réduit à

$$\rho = \frac{|f(x_1) - f(x_2) + \ldots - f(x_{2n+2})|}{2n+2}.$$

De là, le théorème suivant :

La meilleure approximation de $f(x)$, de période 2π, par une expression trigonométrique d'ordre n, sur un ensemble de $2n+2$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$, non équivalents, qui partagent la période en $2n+2$ parties égales, est la moyenne arithmétique des $2n+2$ valeurs $f(x_1)$, $-f(x_2)$, $+f(x_3)$, …, $-f(x_{2n+2})$. Cette moyenne est donc une borne inférieure de la meilleure approximation d'ordre n pour x réel quelconque.

Cette moyenne peut être mise sous une forme intéressante qui se rattache à la série de Fourier. Supposons $f(x)$ développable en série de Fourier convergente :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Si nous posons

$$a'_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad a''_k = \frac{a_k + ib_k}{2},$$

écrire

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k e^{kxi}.$$

s maintenant l'ensemble des points équidistants x_1,
et supposons d'abord $x_1 = 0$, auquel cas

$$x_m = \frac{(m-1)\pi}{n+1}.$$

$$\ldots 1)^{m-1} f(x_m) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} e^{\frac{(m-1)k\pi i}{n+1}}.$$

ultiple impair de $n+1$, on a

$$\ldots 1)^{m-1} e^{\frac{(m-1)k\pi i}{n+1}} = \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1}(-1)^{m-1} = 2n+2.$$

autres cas, on a

$$\sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} e^{\frac{(m-1)k\pi i}{n+1}} = -\frac{e^{2k\pi i}-1}{-e^{\frac{k\pi i}{n+1}}-1} = 0.$$

$$\ldots 1)^m f(x_m) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} a'_{(2\lambda+1)(n+1)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{(2\lambda+1)(n+1)}.$$

rème suivant :

ériodique est développable en série de Fourier la meilleure approximation trigonométrique l'ensemble E *des* $2n+2$ *points,*

$$0, \quad \frac{\pi}{n+1}, \quad \frac{2\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad \frac{(2n+1)\pi}{n+1},$$

ssion

$$\pm\rho = a_{n+1} + a_{3(n+1)} + a_{5(n+1)} + \ldots,$$

Le cas où le premier point de l'ensemble E est x_1 (au lieu de 0) se ramène au précédent par le changement de x en $x + x_1$. Or, on a

$$f(x + x_1) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos k x_1 + b_k \sin k x_1) \cos k x$$
$$+ \sum_{1}^{\infty} (-a_k \sin k x_1 + b_k \cos k x_1) \sin k x.$$

De là, le théorème suivant :

La meilleure approximation d'ordre n de $f(x)$ sur l'ensemble E *des $2n+2$ points,*

$$(\mathrm{E}) \qquad x_1, \quad x_1 + \frac{\pi}{n+1}, \quad x_1 + \frac{2\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad x_1 + \frac{(2n+1)\pi}{n+1},$$

a pour expression

$$\pm \rho = \sum_{\lambda=0}^{\infty} [a_{(2\lambda+1)(n+1)} \cos(2\lambda+1)(n+1) x_1$$
$$+ b_{(2\lambda+1)(n+1)} \sin(2\lambda+1)(n+1) x_1].$$

77. Nouvelle borne inférieure de la meilleure approximation trigonométrique. — Revenons encore une fois à la meilleure approximation ρ pour l'ensemble de toutes les valeurs réelles de x. Le théorème qui termine le numéro précédent en fournit une borne inférieure quel que soit x_1, et cette borne se présente sous forme d'une série trigonométrique en x_1. Choisissons x_1 de manière à majorer le premier terme et remplaçons tous les suivants par leur borne inférieure pour x_1 quelconque ; nous obtenons le théorème suivant :

La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n pour une fonction périodique, développable en série de Fourier convergente, admet la borne inférieure

$$\sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sqrt{a^2_{(2\lambda+1)(n+1)} + b^2_{(2\lambda+1)(n+1)}},$$

pourvu que cette expression soit positive.

es bornes que nous venons de signaler sont distinctes
contrées antérieurement.

**ation des résultats précédents à la meilleure approxi-
olynomes.** — L'approximation de $f(x)$ par polynomes
lle $(-1, +1)$ revient à l'approximation trigonomé-
$\cos\varphi)$. Nous venons de voir que la meilleure approxi-
$\cos\varphi)$ sur l'ensemble

$$0,\quad \frac{\pi}{n+1},\quad \frac{2\pi}{n+1},\quad \ldots,\quad \frac{(2n+1)\pi}{n+1}$$

$$\frac{}{2}\left[f(\cos 0)-f\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)+\ldots-f\left(\cos\frac{(2n+1)\pi}{n+1}\right)\right].$$

$0)$ et $f(\cos\pi)$, les termes sont deux à deux égaux et
ne [ceux à égale distance des extrêmes quand on sup-
$0)$]. De là, le théorème suivant :

*ure approximation de $f(x)$, par un polynome de
r l'ensemble E des $n+2$ points,*

$$\cos\frac{\pi}{n+1},\quad \cos\frac{2\pi}{n+1},\quad \ldots,\quad \cos\frac{n\pi}{n+1},\qquad 1,$$

ession

$$\frac{}{1}\left[\frac{1}{2}f(1)-f\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)+f\left(\cos\frac{2\pi}{n+1}\right)-\ldots\right.$$
$$\left.\pm f\left(\cos\frac{n\pi}{n+1}\right)\pm\frac{1}{2}f(-1)\right].$$

*temps cette expression est une borne inférieure de
approximation dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *conte-
peut aussi lui donner la forme*

$$\pm\rho = a_{n+1}+a_{3(n+1)}+a_{5(n+1)}+\ldots,$$

*les constantes de Fourier de $f(\cos\varphi)$, qui est alors
eloppable en série de Fourier convergente* [1].

---

nstein donne des résultats analogues, sauf quelques inadvertances
l'ordre de la meilleure approximation des fonctions conti-

79. Exemples simples d'approximation trigonométrique minimum. — L'étude des fonctions analytiques fournit des exemples remarquables d'approximation minimum sur lesquels nous reviendrons plus loin. Mais nous pouvons indiquer, dès maintenant, quelques exemples instructifs.

1° L'expression trigonométrique d'ordre n qui donne la meilleure approximation du terme d'ordre $n+1$,

$$a \cos(n+1)x + b \sin(n+1)x,$$

est identiquement nulle.

En effet, posons $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$; cette dernière expression prend la forme

$$r \cos[(n+1)x - \alpha].$$

Elle prend $2n+2$ fois ses valeurs extrêmes $\pm r$ avec alternance de signes en des points intérieurs à une même période. Ce sont les valeurs de l'écart pour l'expression approchée $T = 0$. Donc 0 est d'approximation minimum.

2° Le même raisonnement montre que l'on connaît aussi la meilleure approximation d'ordre n pour la fonction d'ordre $n+1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

L'expression d'approximation minimum est

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx;$$

l'écart est

$$\varphi(x) = a_{n+1} \cos(n+1)x + b_{n+1} \sin(n+1)x$$

et l'approximation a pour valeur

$$\rho = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}.$$

3° Un exemple d'un autre genre nous est donné par la fonction sans dérivée de Weierstrass. Nous allons montrer qu'on en connaît les expressions les plus approchées pour tous les ordres [1].

Soient a un nombre positif < 1 et b un nombre entier impair > 1;

(1) S. Bernstein, *Comptes rendus Acad. Sc.*, [illegible]

e Weierstrass

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \cos b^m x$$

ne expression d'approximation minimum d'ordre n,
s $k+1$ premiers termes de cette série, à savoir

$$T(x) = \sum_{0}^{k} a^m \cos b^m x,$$

rminé par la condition

$$b^k < n < b^{k+1}.$$

écart, qui a pour expression

$$\sum_{k+1}^{\infty} a^m \cos b^m x,$$

valeurs extrêmes avec alternance de signe aux
consécutifs

$$x_\lambda = \frac{\lambda\pi}{b^{k+1}} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, 2b^{k+1})$$

ation correspondante est

$$\rho = \sum_{k+1}^{\infty} a^m = \frac{a^{k+1}}{1-a}.$$

CHAPITRE VIII.

FONCTIONS ANALYTIQUES PRÉSENTANT DES SINGULARITÉS POLAIRES.

80. Correspondance entre les séries de Fourier et de Laurent. — Soit $f(z)$ une fonction périodique de la variable complexe $z = x + yi$. Supposons que cette fonction soit holomorphe dans la bande du plan z comprise entre les deux droites $y = \pm b$, parallèles à l'axe réel. Son développement en série de Fourier est de la forme

$$f(z) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_1^{\infty} A_k, \qquad A_k = a_k \cos k z + b_k \sin k z.$$

Faisons la substitution

$$e^{zi} = t. \tag{1}$$

Cette substitution transforme $f(z)$ dans une fonction $\varphi(t)$ qui est uniforme, à cause de la périodicité.

Quand z varie de 2π sur l'axe réel, t décrit le cercle de centre origine et de rayon 1. Quand z varie de 2π sur les droites $y = \pm b$, t décrit les cercles de rayons e^{-b} et e^{b}. La substitution (1) fait donc correspondre à la bande du plan z comprise entre les deux droites $y = \pm b$, la couronne circulaire du plan t comprise entre les deux cercles de rayons e^{-b} et e^{b}; et $\varphi(t)$ est holomorphe dans cette bande.

Par la substitution (1), le terme général du développement de Fourier devient

$$A_k = a'_k t^k + b'_k \frac{1}{t^k}, \tag{2}$$

eloppement de Fourier de $f(z)$ se transforme dans
) suivant les puissances positives et négatives de t,
en série de Laurent, convergente dans la couronne
nsidérée. Par conséquent, la série de Fourier de $f(z)$
nvergente dans la bande correspondante. Nous allons
ordre de grandeur des coefficients et le degré de con-
la série.

ème I. — *Si $f(z)$ de période 2π est holomorphe et dule soit $\leq$ M dans la bande comprise entre les s $y = \pm b$, alors, pour z réel, le module du terme a série de Fourier vérifie la condition*

$$|A_k| < 2Me^{-kb}.$$

ns le terme général (2) du développement de $\varphi(t)$ en ent dans la couronne. Soient C_1 le cercle de rayon e^{-b} le de rayon e^b qui limitent la couronne. On a

$$a'_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\varphi(t)}{t^k}\frac{dt}{t}, \qquad b'_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\varphi(t)\,t^k\frac{dt}{t};$$

ent,

$$|a'_k| \leq e^{-kb}\frac{M}{2\pi}\int_{C_2}\left|\frac{dt}{t}\right| = Me^{-kb},$$

$$|b'_k| \leq e^{-kb}\frac{M}{2\pi}\int_{C_1}\left|\frac{dt}{t}\right| = Me^{-kb};$$

el, $|A_k|$ ne surpasse pas la somme de ces deux bornes.

ème II. — *Si $f(z)$ est holomorphe et de module $\leq$ M nde comprise entre les deux droites $y = \pm b$, la e Fourier donne, sur l'axe réel, une approxima-*

$$\varepsilon_n < \frac{2M}{e^b - 1}e^{-nb}.$$

effet,

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} A_k\right| < \sum_{n+1}^{\infty} 2Me^{-kb} = 2M\frac{e^{-(n+1)b}}{1-e^{-b}} = 2M\frac{e^{-nb}}{e^b-1}.$$

larités polaires. Décomposition de la partie principale

en éléments simples. — Nous allons maintenant étudier comment se comporte la série de Fourier lorsque $f(z)$ admet des singularités polaires sur les droites $y = \pm b$. Nous devons d'abord mettre sous la forme la plus convenable la partie principale de la fonction au voisinage d'un pôle d'ordre r.

La fonction $f(z)$ est supposée réelle avec z; par conséquent, les pôles sont conjugués deux à deux et, si $z = a + bi$ est un pôle, $z = a - bi$ en est un autre du même ordre. Déterminons la forme de la partie principale de $f(z)$ au voisinage de deux pôles conjugués $a \pm bi$. En changeant au besoin z en $z + a$, ces pôles deviennent $\pm bi$. Considérons les deux fonctions

$$f(z) + f(-z), \qquad \frac{f(z) - f(-z)}{\sin z}.$$

Ce sont des fonctions paires de période 2π, donc des fonctions uniformes de $\cos z$. Supposons qu'elles admettent les points $\pm bi$ comme pôles de degré r; nous aurons

$$\frac{f(z) + f(-z)}{2} = \frac{A_0}{(\cos z - \cos bi)^r} + \dots + \frac{A_r}{\cos z - \cos bi} + \psi(z),$$

$$\frac{f(z) - f(-z)}{2\sin z} = \frac{B_0}{(\cos z - \cos bi)^r} + \dots + \frac{B_r}{\cos z - \cos bi} + \chi(z),$$

les fonctions ψ et χ étant holomorphes au voisinage des points $\pm bi$. Multiplions la seconde équation par $\sin z$ et ajoutons; nous obtenons la partie principale de $f(z)$, décomposée en une somme de termes que l'on peut considérer comme des *éléments simples* :

$$\frac{A_0 + B_0 \sin z}{(\cos z - \cos bi)^r} + \frac{A_1 + B_1 \sin z}{(\cos z - \cos bi)^{r-1}} + \dots + \frac{A_r + B_r \sin z}{\cos z - \cos bi}.$$

Si le pôle est d'ordre r, un au moins des coefficients A_0, B_0 n'est pas nul. Si les pôles conjugués sont $z = a \pm bi$, on changera z en $z - a$ dans les formules précédentes.

84. Développement des éléments simples en série de Fourier. — Le développement en série de Fourier de la partie principale de $f(z)$ dans le domaine d'un pôle ne présente aucune difficulté. On l'obtient, comme il suit, presque sans calculs, si le pôle est

. b un nombre réel positif; on a

$$b) = \frac{1}{1-e^{zi-b}} = \frac{1-e^{-zi-b}}{(1-e^{zi-b})(1-e^{-zi-b})}$$
$$= \frac{e^{b}-e^{-zi}}{e^{b}+e^{-b}-2\cos z} = \frac{\operatorname{ch} b+\operatorname{sh} b-\cos z+i\sin z}{2(\operatorname{ch} b-\cos z)}.$$

e là

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{k(zi-b)} - \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{sh} b+i\sin z}{2(\operatorname{ch} b-\cos z)}$$

ant les parties réelles et imaginaires,

$$\frac{\operatorname{sh} b}{2(\operatorname{ch} b-\cos z)} = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kb}\cos kz,$$
$$\frac{\sin z}{2(\operatorname{ch} b-\cos z)} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kb}\sin kz.$$

mmédiatement de la combinaison de ces deux équations
ement en série de Fourier de l'élément simple du
lre :

$$\frac{A+B\sin z}{\cos z-\operatorname{ch} b}.$$

ppement de l'élément simple d'ordre plus élevé est un
mpliqué, mais le calcul se fait par de simples dériva-
donne lieu à aucune difficulté. Posons, pour simplifier,

$$\operatorname{ch} b = m, \qquad \frac{db}{dm} = \frac{1}{\operatorname{sh} b};$$

s, en dérivant $r-1$ fois par rapport à m,

$$\frac{1}{(m-\cos z)^{r}} = \frac{2(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dm^{r-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kb}}{\operatorname{sh} b}\cos kz,$$
$$\frac{\sin z}{(m-\cos z)^{r}} = \frac{2(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dm^{r-1}}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kb}\sin kz.$$

uellement inutile d'effectuer ces dérivations. Il est plus
de déterminer la valeur principale des coefficients de
ur $k=\infty$. Or cette valeur est manifestement celle qu'on

obtient en dérivant $m-1$ fois de suite l'exponentielle e^{-kb}. On trouve ainsi que les coefficients de $\cos kz$ et de $\sin kz$ ont respectivement pour valeur asymptotique, pour $k = \infty$,

$$\frac{2k^{r-1}e^{-kb}}{(r-1)!(\operatorname{sh} b)^r}, \quad \frac{2k^{r-1}e^{-kb}}{(r-1)!(\operatorname{sh} b)^{r-1}}.$$

Si l'on considère le terme d'ordre k dans le développement de

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}\sin x}{(\operatorname{ch} b-\cos x)^r},$$

on voit que le maximum de son module pour x réel a pour valeur asymptotique

$$\frac{2\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2\operatorname{sh}^2 b}}{(r-1)!(\operatorname{sh} b)^r}\, k^{r-1}e^{-kb}.$$

Ces diverses expressions sont de l'ordre de $k^{r-1}e^{-kb}$. Cette conclusion subsiste, quelle que soit la position du pôle sur les droites $y = \pm b$, car on passe du cas particulier traité ci-dessus au cas général par le changement de z en $z-a$.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant :

85. **Théorème III.** — *Si $f(z)$ est holomorphe dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$ et n'a, sur ces droites, que des pôles comme points critiques, ceux-ci d'ordre r au plus, alors, pour $z = x$, la somme S_n de Fourier donne une approximation*

$$\rho_n < h n^{r-1} e^{-nb},$$

où h est une constante par rapport à n.

En effet, nous pouvons mettre $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \mathrm{P} + \varphi(z),$$

où P est la somme des parties principales relatives aux divers pôles supposés ci-dessus, et $\varphi(z)$ une fonction holomorphe et bornée dans une bande débordant la précédente, comprise par exemple entre les droites $y = \pm(b+\varepsilon)$. Le terme général A_k de la série de Fourier de f est la somme des termes du même ordre dans les développements des diverses parties principales qui composent P et dans celui de $\varphi(z)$. En vertu du théorème I, le terme

ordre de $e^{-k(b+\varepsilon)}$, et les termes relatifs aux parties
rdre de $k^{r-1}e^{-kb}$ au plus. Donc leur somme A_k
dre supérieur à cette dernière expression. On
er une constante h telle qu'on ait, quel que

$$|A_k| \overline{\gtrless} hk^{r-1}e^{-kb}.$$

$$|S_n| \overline{\gtrless} h\sum_{n+1}^{\infty} k^{r-1}e^{-kb}.$$

me, on passe du terme écrit au suivant en le
xpression

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{r-1}e^{-b} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{r-1}e^{-b} = \lambda,$$

upposer n assez grand pour que λ soit < 1. Il

$$\begin{aligned}|S_n| &< hn^{r-1}e^{-nb}\sum_{0}^{\infty}\lambda^k\\ &< \frac{h}{1-\lambda}n^{r-1}e^{-nb},\end{aligned}$$

manière d'écrire la constante, est le théorème

ontre la dépendance qu'il y a entre l'ordre de
oximation de $f(x)$ par les sommes de Fourier et
ır de $f(z)$ quand z tend vers les droites $y = \pm b$.
ontrer maintenant un théorème qui établira la
ıe, mais qui s'applique à toute représentation
t pas seulement à celle de Fourier.

V. — *Soit $f(x)$ une fonction de période* 2π;
le admette une expression trigonométrique
re n, T_n, telle que l'approximation sur l'axe
que soit n, la condition

$$\rho_n < \varphi(n)e^{-nb},$$

fonction non décroissante de n, mais qui finit
eure à $e^{\varepsilon n}$, quelque petit que soit ε, quand n

augmente indéfiniment; alors $f(z)$ est une fonction holomorphe de $z = x + yi$ dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$ (frontière exclue) et l'on a, en supposant y positif,

$$|f(x \pm yi)| < 2e^{2b}\int_1^{\infty}\varphi(t)e^{-(b-y)t}\,dt.$$

Dans notre hypothèse, la différence $T_n - T_{n-1} = \rho_{n-1} - \rho_n$ est une expression trigonométrique d'ordre n, dont le module reste (sur l'axe réel) inférieur à

$$2\varphi(n)e^{-(n-1)b}.$$

Nous avons donc sur l'axe réel, par le théorème général sur le module des dérivées (n° 30),

$$|T_{n-1}^{(k)} - T_n^{(k)}| < 2e^{b}\varphi(n)n^k e^{-nb}.$$

Considérons le développement, pour x réel,

$$f(x) = T_0 + (T_1 - T_0) + \ldots + (T_n - T_{n-1}) + \ldots.$$

Cette série est indéfiniment dérivable sur l'axe réel, car, pour un ordre k quelconque, nous formons la série majorante

$$|f^{(k)}(x)| < 2e^{b}[\varphi(1)e^{-b} + \varphi(2)e^{-2b}2^k + \ldots + \varphi(n)e^{-nb}n^k + \ldots].$$

Or cette série a une valeur finie, comme nous allons le montrer en la majorant elle-même par une intégrale. Nous avons

$$\varphi(n)n^k e^{-nb} < \int_0^1 \varphi(n+t)(n+t)^k e^{-(n+t-1)b}\,dt$$
$$< e^{b}\int_n^{n+1}\varphi(t)t^k e^{-bt}\,dt$$

et, par conséquent,

$$|f^{(k)}(x)| < 2e^{2b}\int_1^{\infty}\varphi(t)t^k e^{-bt}\,dt.$$

Cette borne va nous permettre de définir $f(z)$ dans la bande par son développement de Taylor. Posons

$$z = x + u, \qquad |u| < y;$$

il vient

Je dis que cette série converge dans la bande, donc si μ est $< b$, car on a, par la majorante précédente,

$$|f(z)| < 2e^{2b} \int_1^\infty e^{-bt} \varphi(t)\, dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!}$$
$$< 2e^{2b} \int_1^\infty \varphi(t) e^{-(b-\mu)t}\, dt.$$

Or cette intégrale existe pour $\mu < b$, car $\varphi(t)$ est d'ordre inférieur à $e^{\varepsilon t}$ par hypothèse. Si l'on fait $u = yi$, d'où $\mu = y$, on obtient la formule du théorème.

Remarque. — On peut aussi supposer la fonction $\varphi(n)$ non croissante. Dans ce cas, la majoration se fait en écrivant $\varphi(n-1)$ au lieu de $\varphi(n)$, donc $\varphi(t-1)$ au lieu de $\varphi(t)$. Il en résulterait *a fortiori*

$$|f(x \pm yi)| < 2e^{2b} \int_0^\infty \varphi(t) e^{-(b-y)t}\, dt.$$

87. **Théorème V.** — *Si, quel que soit n, $f(x)$ peut être représenté sur l'axe réel par une expression trigonométrique d'ordre n, avec une approximation*

$$\rho_n < \psi(n)\, n^{r-1} e^{-nb},$$

où r est un entier > 0 et $\psi(n)$ une fonction qui tend vers zéro pour $n = \infty$, alors $f(z)$ est holomorphe dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$. Si, de plus, $f(z)$ n'a, sur ces droites, d'autres points critiques que des pôles, ceux-ci sont d'ordre $< r$.

Nous avons, dans ce cas-ci,

$$\varphi(n) = n^{r-1} \psi(n)$$

et nous pouvons toujours admettre que cette fonction soit croissante si r est > 1, ou décroissante si r est < 1. Appliquons donc le théorème précédent ou la remarque finale; il vient, en tous cas,

$$|f(x \pm yi)| < 2e^{2b} \int_0^\infty \psi(t)\, t^{r-1} e^{-(b-y)t}\, dt.$$

Quand y tend vers b, cette expression est infiniment petite par

rapport à

$$\int_0^\infty t^{r-1} e^{-(b-y)t}\,dt = \frac{\Gamma(r)}{(b-y)^r}$$

et, par conséquent, $f(z)$ ne peut pas avoir de pôle d'ordre r sur la droite $y = b$.

Comparons le théorème précédent au théorème III, nous obtenons l'énoncé suivant :

88. **Théorème VI.** — *Si la fonction $f(z)$, de période 2π, est holomorphe entre les droites $y = \pm b$ et n'a sur ces droites que des pôles comme points critiques; si, de plus, l'ordre maximum de ces pôles est r, alors $f(x)$ admet une représentation d'ordre n quelconque fournissant, sur l'axe réel, une approximation qui, pour $n = \infty$, est d'ordre égal ou inférieur à*

$$n^{r-1} e^{-nb},$$

mais cet ordre ne peut être inférieur, n restant arbitraire.

On conclut de ce théorème que, pour les fonctions considérées, *l'approximation obtenue par les sommes de Fourier est de l'ordre de la meilleure approximation.*

Il suit des théorèmes précédents que l'ordre de la meilleure approximation pour $n = \infty$ suffit, dans certains cas, pour déceler l'existence d'un point critique essentiel. Par exemple, si $f(z)$ est holomorphe entre les droites $y = \pm b$ et si sa meilleure approximation est d'ordre inférieur à $e^{-(b+\varepsilon)n}$ quel que soit ε, sans l'être jamais définitivement à $n^r e^{-nb}$ quel que soit r, on peut affirmer que $f(z)$, supposée uniforme, admet un point critique essentiel sur les droites $y = \pm b$.

89. **Approximation minimum d'un élément polaire simple du premier ordre.** — L'élément simple du premier ordre relatif au pôle $z = \pm bi$ est le suivant :

$$\frac{A + B\sin x}{\cos bi - \cos x}.$$

C'est un fait très intéressant qu'il soit possible d'en obtenir, pour chaque ordre n, l'expression trigonométrique d'approximation minimum. Nous allons former cette expression.

b positif et posons

$$\mathrm{T}(x) = -2e^{nix}\sin^2\frac{x-bi}{2};$$

expression trigonométrique entière d'ordre $n+1$.
r x réel, μ et φ le module et l'argument de

$$-2\sin^2\frac{x-bi}{2};$$

$$\frac{\quad i}{} = \cos(x-bi) - 1 = (\cos x\cos bi - 1) + i\sin x\frac{\sin bi}{i};$$

t, le carré du module a pour valeur

$$\begin{aligned}
&(\cos x \operatorname{ch} b - 1)^2 + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 b\\
&\cos^2 x \operatorname{ch}^2 b - 2\cos x \operatorname{ch} b + 1 + \sin^2 x(\operatorname{ch}^2 b - 1)\\
&(\operatorname{ch} b - \cos x)^2
\end{aligned}$$

φ est déterminé par les équations

$$\mathrm{s}\varphi = \frac{\cos x \operatorname{ch} b - 1}{\operatorname{ch} b - \cos x}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sin x \operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b - \cos x}.$$

formules mettent en évidence que φ varie de 0 à 2π
de 0 à 2π et que φ est une fonction impaire de x.
si

$$\mathrm{T}(x) = (\operatorname{ch} b - \cos x)e^{(nx+\varphi)i},$$

$$\frac{\mathrm{T}(x)}{\operatorname{ch} b - \cos x} = \cos(nx+\varphi) + i\sin(nx+\varphi).$$

elle est paire et la partie imaginaire impaire. Nous
poser, P_1 et P_2 désignant respectivement des poly-
rés $n+1$ et n,

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{P}_1(\cos x) + i\sin x\,\mathrm{P}_2(\cos x).$$

ors les parties réelles et imaginaires dans l'équation
trouve

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{P}_1(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x} &= \cos(nx+\varphi),\\
\frac{\sin x\,\mathrm{P}_2(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x} &= \sin(nx+\varphi).
\end{aligned}\right.$$

Posons encore

$$R_1(\cos x) = \frac{P_1(\operatorname{ch} b) - P_1(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x},$$

$$R_2(\cos x) = \frac{P_2(\operatorname{ch} b) - P_2(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x},$$

R_1 et R_2 sont respectivement des polynomes de degré n et $n-1$ et les équations précédentes peuvent s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{P_1(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x} - R_1 = \cos(nx+\varphi), \\[2mm] \dfrac{\sin x\, P_2(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x} - \sin x\, R_2 = \sin(nx+\varphi). \end{cases}$$

Quand x varie de 0 à 2π, $nx+\varphi$ varie de 0 à $2(n+1)\pi$ et les seconds membres atteignent $2n+2$ fois leur maximum absolu 1 avec alternance de signes. Donc (n° 70, 4°) les expressions trigonométriques entières d'ordre n, R_1 et $\sin x R_2$, sont d'approximation minimum pour les fonctions respectives

$$\frac{P_1(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x}, \quad \frac{\sin x\, P_2(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x},$$

et l'approximation minimum est 1.

Calculons maintenant les valeurs de $P_1(\operatorname{ch} b)$ et de $P_2(\operatorname{ch} b)$. Nous avons

$$P_1(\cos x) = \frac{T(x) + T(-x)}{2},$$

$$P_2(\cos x) = \frac{T(x) - T(-x)}{2i\sin x}.$$

Faisons $x = bi$ et remarquons que l'on a, par (1),

$$T(bi) = 0, \qquad T(-bi) = -2e^{nb}\sin^2 bi = 2e^{nb}\operatorname{sh}^2 b;$$

il vient

$$P_1(\cos bi) = \frac{T(-bi)}{2} = e^{nb}\operatorname{sh}^2 b,$$

$$P_2(\cos bi) = -\frac{T(-bi)}{2i\sin bi} = \frac{T(-bi)}{2\operatorname{sh} b} = e^{nb}\operatorname{sh} b.$$

Donc, en divisant respectivement les équations (3) par ces deux quantités, celles-ci prennent la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{ch} b - \cos x} - R_1\dfrac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b} = \cos(nx+\varphi)\dfrac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b}, \\[2mm] \dfrac{\sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x} - R_2 \sin x\dfrac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b} = \sin(nx+\varphi)\dfrac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b}. \end{cases}$$

les mettent en évidence le théorème suivant :

éléments simples

$$\frac{1}{\operatorname{ch} b - \cos x}, \quad \frac{\sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x}$$

espectivement, comme expressions trigonométriques ation minimum d'ordre n, les deux fonctions

$$R_1 \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b}, \quad \sin x \, R_2 \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b},$$

ximations minimum correspondantes sont :

$$\frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b}, \quad \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b}.$$

ns maintenant les équations (4) respectivement par les et B et ajoutons. Posons

$$S = \left(\frac{AR_1}{\operatorname{sh}^2 b} + \frac{BR_2}{\operatorname{sh} b}\sin x\right) e^{-nb};$$

S est d'ordre n et il vient

$$\frac{\sin x}{\cos x} - S = \left[\frac{A\cos(nx+\varphi)}{\operatorname{sh}^2 b} + \frac{B\sin(nx+\varphi)}{\operatorname{sh} b}\right] e^{-nb}.$$

core

$$A = \cos\alpha\sqrt{A^2 + B^2\operatorname{sh}^2 b},$$

$$B\operatorname{sh} b = \sin\alpha\sqrt{A^2 + B^2\operatorname{sh}^2 b};$$

quation devient

$$\frac{B\sin x}{-\cos x} - S = \cos(nx+\varphi-\alpha)\frac{\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{\operatorname{sh}^2 b} e^{-nb}.$$

nclut le théorème suivant :

eure approximation de l'élément polaire simple ordre

$$\frac{A + B\sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x}$$

ression trigonométrique d'ordre n est

$$\frac{\sqrt{A^2 + B^2\operatorname{sh}^2 b}}{\operatorname{sh}^2 b} e^{-nb}.$$

90. Valeur asymptotique de la meilleure approximation d'un élément simple d'ordre quelconque. — Posons

$$\operatorname{ch} b = m, \qquad \frac{db}{dm} = \frac{1}{\operatorname{sh} b}.$$

Dérivons $r-1$ fois l'équation (5) par rapport à m. Comme φ et α sont des fonctions analytiques de m et ne dépendent pas de n, la valeur asymptotique du second membre pour n infini se réduit au terme qui provient des dérivations successives de l'exponentielle e^{-nb}, parce que chacune de ces dérivations introduit le facteur n. Ce terme sera

$$(-1)^{r-1}\cos(nx+\varphi-\alpha)\,\frac{\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{(\operatorname{sh} b)^{r+1}}\,n^{r-1}e^{-nb}.$$

Il admet donc $2n+2$ extrémés égaux et de signes alternés dans la période.

La dérivation de l'élément simple au premier membre de (5) donne comme résultat

$$(-1)^{r-1}(r-1)!\,\frac{A+B\sin x}{(m-\cos x)^r}.$$

En vertu de la règle du n° 71, la meilleure approximation d'ordre (infini) n de cette expression est enfermée entre deux bornes, asymptotiquement égales à la valeur absolue commune des extrémés mentionnés ci-dessus. De là, le théorème suivant :

L'approximation minimum de l'élément simple d'ordre r,

$$\frac{A+B\sin x}{(\operatorname{ch} b-\cos x)^r},$$

par une expression trigonométrique d'ordre $\overline{\gtrless}\, n$, a pour valeur asymtotique (pour $n=\infty$)

$$\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{(\operatorname{sh} b)^{r+1}}\,n^{r-1}e^{-nb}.$$

Il est intéressant de comparer cette approximation avec celle que donne la série de Fourier. D'après nos calculs antérieurs (n° 84), le terme d'ordre n du développement de Fourier de l'élément simple d'ordre r ci-dessus a pour valeur asymptotique

$$2\,\frac{A\cos nx+B\operatorname{sh} b\sin nx}{(r-1)!(\operatorname{sh} b)^r}\,n^{r-1}e^{-nb}.$$

leur asymptotique de l'approximation correspondante sera

$$\frac{2\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{(r-1)!(\operatorname{sh} b)^r}\sum_{n+1}^{\infty} k^{r-1}e^{-kb},$$

asymptotiquement, revient à

$$\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}}{(\operatorname{sh} b)^r\,\frac{1}{2}(e^b-1)}\,n^{r-1}e^{-nb}.$$

eilleure approximation est donc à celle de Fourier dans le

$$\frac{e^b-1}{2\operatorname{sh} b}=\frac{1}{1+e^{-b}}.$$

pport tend vers l'unité quand b tend vers l'infini.

résultats que nous venons d'obtenir pour les éléments peuvent s'étendre à la fonction $f(z)$ elle-même dans des ez généraux. La valeur asymptotique de la meilleure mation de $f(x)$ sera connue si $f(z)$ n'a qu'un seul couple s conjugués sur les droites $y=\pm b$, ou s'il existe sur ces un couple de pôles conjugués d'ordre plus élevé que les

Application à la représentation par polynomes. — Les résul- écédents s'étendent, par la transformation $x=\cos\varphi$, à la ntation d'une fonction $f(x)$ en série de polynomes trigo- iques et à sa meilleure représentation par polynomes dans alle $(-1, +1)$.

lécrit les droites $y=\pm b$, la variable x décrit une ellipse rs ± 1 et dont la somme des demi-axes est $R=e^b$. Nous erons, en abrégé, l'*ellipse* (R). A la bande du plan φ se entre les droites correspond, dans le plan x, l'aire inté- l'ellipse (R).

ffira donc d'énoncer quelques-uns des théorèmes trans- Le théorème II (n° 82) se transforme dans le suivant :

x) est holomorphe et de module $<$ M *dans l'ellipse* (R), *ne* S_n *de la série de polynomes trigonométriques donne,*

sur l'axe réel, une approximation

$$\rho_n < \frac{2M}{R^n(R-1)}.$$

Voici maintenant le théorème transformé de IV (n° 86) :

Si, quel que soit n, $f(x)$ peut être représenté dans l'intervalle $(-1, +1)$ par un polynome de degré $\leqq n$, avec une approximation

$$\rho_n < \frac{\varphi(n)}{R^n} \qquad (R > 1),$$

où $\varphi(n)$ est une fonction monotone de n, qui devient inférieure à $e^{\varepsilon n}$ quelque petit que soit ε quand n tend vers l'infini, alors $f(z)$ est holomorphe dans l'ellipse (R) (¹). *De plus, si $r < R$, on a dans l'ellipse (r)*

$$|f(z)| < 2R^2 \int_0^{\infty} \varphi(t)\left(\frac{r}{R}\right)^t dt.$$

Voici le théorème transformé de VI (n° 88) :

Si $f(z)$ n'a pas d'autres points critiques que des pôles sur l'ellipse (R) et que l'ordre maximum de ces pôles soit r, sa meilleure approximation d'ordre n infiniment grand sera infiniment petite d'ordre égal ou inférieur à $n^{r-1} : R^n$, mais cet ordre ne pourra pas être moindre si n reste arbitraire.

Passons maintenant aux singularités polaires.

Considérons la fonction

$$\frac{1}{x-a},$$

où a est un nombre réel de module > 1. On peut toujours supposer a positif, car, si a était négatif, on changerait le signe de x et celui de la fonction. Posons

$$x = \cos\varphi, \qquad a = \operatorname{ch} b;$$

nous sommes ramenés à la fonction

$$\frac{1}{\cos\varphi - \operatorname{ch} b}, \qquad b = \log(a + \sqrt{a^2-1}).$$

(¹) Cette partie du théorème est due à M. Bernstein, *Sur la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 24).

s connaissons la meilleure approximation trigonomé-
cette fonction (n° 89). De là, le théorème suivant [1] :

naît la meilleure approximation de

$$\frac{1}{x-a} \quad (a>1)$$

lynome de degré n dans l'intervalle $(-1, +1)$ *et*
leure approximation est

$$\rho_n = \frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

considérons maintenant l'expression simple

$$\frac{1}{(x-a)^r},$$

un pôle d'ordre r entier, nous pouvons encore déter-
valeur asymptotique de sa meilleure approximation
infiniment grand dans l'intervalle $(-1, +1)$. Cette

$$\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{n^{r-1}}{(a^2-1)^{\frac{r+1}{2}}(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

eu d'un pôle réel, nous considérions un couple de pôles
dans le plan x, la substitution $x = \cos\varphi$ introdui-
ne on s'en aperçoit facilement, deux couples de pôles
distincts sur les droites $y = \pm b$ du plan φ. Nous ne
us en état de déterminer la valeur asymptotique de
re approximation d'ordre infiniment grand n. Cette
ion est un infiniment petit dont l'ordre seul nous sera

éralement, si une fonction n'admet pas d'autres points
ue des pôles, sa meilleure approximation, dans l'inter-
$+1$), par un polynome d'ordre infiniment grand n, est

---

[1] STEIN, *Sur la valeur asymptotique de la meilleure approxima-*
ctions analytiques admettant des singularités données [*Bull.*
Belgique (Classe des Sciences, n° 2, 1913)]. M. Bernstein n'a consi-
roximation par polynomes. Nous venons de montrer que l'on arrive
s plus complets dans l'approximation trigonométrique.

un infiniment petit dont l'ordre est connu. On suppose toutefois que les pôles sont extérieurs au segment considéré $(-1, +1)$.

92. Remarque générale. — Les pôles sont des cas particuliers de points critiques plus généraux, que nous appellerons *points critiques d'ordre s* (*s* fractionnaire) et que nous étudierons dans le Chapitre suivant. Nous allons utiliser dans cette étude des procédés entièrement différents des précédents, mais qui s'appliquent au cas des singularités polaires. Nous serons ainsi conduits à des théorèmes plus généraux qui contiennent les précédents comme cas particuliers (*s* entier).

CHAPITRE IX.

QUES PRÉSENTANT CERTAINES SINGULARITÉS
ES (POINTS CRITIQUES D'ORDRE s).

**préliminaire de la valeur asymptotique d'une
nplexe.** — Considérons, dans le plan de la
un segment vertical PQ ayant pour extré-

$$x + bi), \qquad Q[\alpha + (b + \varepsilon)i],$$

fs. Ce segment est de longueur ε. Désignons
uru dans le sens direct, formé des deux bords
'un cercle infiniment petit décrit autour du
ntégrale sur ce lacet :

$$= \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(z) e^{kzi} dz}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s},$$

nction qui est régulière dans le cercle de
PQ (ou ε) et qui ne s'annule pas au point P.
k et s sont des constantes et que s n'est pas
nul, de sorte que P est un point singulier de
. Nous nous proposons maintenant de déter-
nptotique de l'intégrale I_k, quand k est un
mente indéfiniment.
nent de variables

$$z = \alpha + bi + t.$$

fait correspondre aux points P et Q les
$Q'(t = \varepsilon i)$ et transforme le lacet L dans un
ntourne le segment $P'Q'$ de l'axe imaginaire.
n précédent par une simple translation. L'in-

tégrale transformée sera

$$I_k = \frac{e^{-kb+k\alpha i}}{\pi} \int_{L'} \frac{\varphi(\alpha + bi + t)e^{kti}\,dt}{[\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)]^s}.$$

Par hypothèse, sur L', on a le développement convergent, procédant suivant les puissances de t :

$$(2) \qquad \frac{\varphi(\alpha + bi + t)}{[\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)]^s} = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots}{t^s};$$

donc, q désignant un entier positif et μ une fonction de t bornée sur L', on a

$$\frac{\varphi(\alpha + bi + t)}{[\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)]^s} = \sum_{\lambda=0}^{q-1} a_\lambda t^{\lambda-s} + \mu t^{q-s},$$

d'où

$$(3) \qquad I_k = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \frac{a_\lambda}{\pi} e^{-kb+k\alpha i} \int_{L'} t^{\lambda-s} e^{kti}\,dt$$
$$+ \frac{1}{\pi} e^{-kb+k\alpha i} \int_{L'} \mu t^{q-s} e^{kti}\,dt.$$

Prenons pour q le premier entier positif $\geq s$. Alors, dans la dernière intégrale, $q-s$ est positif, t^{q-s} s'annule sur le cercle infiniment petit de centre $P'(t=0)$ et l'intégrale sur L' se réduit à celles sur les deux bords du segment $P'Q'$ (où $t = ri$, r variant de 0 à ε). Soit M le module maximum de μ; on voit, en remplaçant la quantité à intégrer par son module, que le dernier terme de la formule précédente est de module inférieur à

$$\frac{2M}{\pi} e^{-kb} \int_0^{\varepsilon} t^{q-s} e^{-kt}\,dt < \frac{2M}{\pi} \frac{\Gamma(1+q-s)}{k^{1+q-s}} e^{-kb}.$$

Nous allons constater que cette borne est infiniment petite par rapport à la valeur asymptotique des autres termes de la mêmer formule (3). Considérons donc l'un d'eux

$$\frac{a_\lambda}{\pi} e^{-kb+k\alpha i} \int_{L'} t^{\lambda-s} e^{kti}\,dt.$$

Supposons provisoirement $\lambda - s \geq -1$, auquel cas l'intégrale est encore nulle sur le cercle infiniment petit de centre P' et se

...s sur les deux bords du segment P′Q′. Posons

$$t = re^{\varphi i};$$

... de t est $-\frac{3\pi}{2}$ à gauche et $+\frac{\pi}{2}$ à droite du seg-
...D'ailleurs, sur les deux bords, on a $t = ir$, $dt = i\,dr$
...re o et ε. Il vient ainsi

$$\ldots e^{kti}\,dt = ie^{-\frac{3\pi i}{2}(\lambda - s)} \int_{\varepsilon}^{0} r^{\lambda-s} e^{-kr}\,dr$$
$$+ ie^{\frac{\pi i}{2}(\lambda - s)} \int_{0}^{\varepsilon} r^{\lambda-s} e^{-kr}\,dr$$
$$= -2e^{-\frac{\pi i}{2}(\lambda - s)} \sin(\lambda - s)\pi \int_{0}^{\varepsilon} r^{\lambda-s} e^{-kr}\,dr.$$

...re disparaître la restriction imposée à $\lambda - s$, mettons
... sous la forme suivante :

$$\ldots i\,dt = -2e^{\frac{\pi i}{2}(s-\lambda)} \sin(\lambda - s)\pi \left[\frac{\Gamma(\lambda + 1 - s)}{k^{\lambda+1-s}} - \int_{\varepsilon}^{\infty} r^{\lambda-s} e^{-kr}\,dr \right].$$

...nouvelle forme, la relation subsiste pour toutes les ... s et, en particulier, pour les valeurs réelles néga... deux membres sont des fonctions analytiques uni-... s. Si k tend vers l'infini, le dernier terme est ...n présence du précédent. C'est donc celui-ci qui ...eur asymptotique, et l'on a, par les propriétés clas-...ctions Γ,

$$\int_{\mathrm{I}} t^{\lambda-s} e^{kti}\,dt \sim 2\pi e^{\frac{\pi i}{2}(s-\lambda)} \frac{k^{s-1-\lambda}}{\Gamma(s-\lambda)},$$

...signant l'égalité asymptotique.
...tant $\neq$ o), le terme principal dans la formule (3) ... = o. La valeur asymptotique de I_k sera

La valeur de a_0 se tire de la formule (2). On a

$$a_0 = \varphi(\alpha + bi) \lim_{t=0} \left[\frac{t}{\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)} \right]^s$$
$$= \frac{\varphi(\alpha + bi)}{(\sin bi)^s} = e^{-\frac{s\pi i}{2}} \frac{\varphi(\alpha + bi)}{(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Par la substitution de cette valeur, on trouve la relation asymptotique cherchée

$$(5) \qquad \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\varphi(z) e^{kzi}\, dz}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s} \sim 2\varphi(\alpha + bi)\, \frac{k^{s-1} e^{-kb + k\alpha i}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Cette formule est en défaut si s est un entier nul ou négatif, et ne l'est que dans ce cas.

94. Dérivation de la formule asymptotique précédente. — La dérivation par rapport à la lettre s des formules (2), (3) et (4) se justifie à simple vue. Donc la formule (5) est aussi dérivable par rapport à s. Cette dérivation conduit à la formule asymptotique suivante, dans laquelle m est un entier positif :

$$(6) \qquad \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\{\log[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]\}^m}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s}\, \varphi(z) e^{kzi}\, dz$$
$$\sim 2(-1)^m \frac{k^{s-1}(\log k)^m e^{-kb + k\alpha i}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}\, \varphi(\alpha + \beta i).$$

Ceci suppose toutefois que s ne soit pas un entier nul ou négatif. Dans ce cas, nous poserons $s = -p$ (p entier positif). Il faut alors, pour obtenir le terme principal, faire porter une fois la dérivation sur le facteur $1 : \Gamma(s)$ qui s'annule pour $s = -p$. On trouve ainsi, comme valeur asymptotique de l'intégrale (6),

$$2(-1)^m m \left[\frac{1}{\Gamma(s)}\right]' \frac{k^{s-1}(\log k)^{m-1} e^{-kb + k\alpha i}}{(\operatorname{sh} b)^s}\, \varphi(\alpha + \beta i).$$

D'ailleurs, pour $s = -p$, on a

$$\left[\frac{1}{\Gamma(s)}\right]' = \left[\frac{\sin s\pi}{\pi}\, \Gamma(1 - s)\right]' = \cos s\pi\, \Gamma(1 - s) = (-1)^p p!$$

Donc, si $s = -p$ est un entier négatif, et en supposant pour simplifier $\alpha = 0$, la formule (6) doit être remplacée par la sui-

$$\int_L (\operatorname{ch} b - \cos z)^p [\log(\operatorname{ch} b - \cos z)]^m \varphi(z) e^{kzi}\,dz$$
$$\sim 2m(-1)^{m+p}(\operatorname{sh} b)^p \frac{(\log k)^{m-1} e^{-kb}}{k^{p+1}} \varphi(bi).$$

s critiques d'ordre s. — Nous allons maintenant étu-
ctions présentant certains points critiques plus géné-
s pôles et comprenant les pôles comme cas particu-
tout d'abord définir ces points critiques.
une fonction analytique, uniforme dans le voisinage
z_0. Nous dirons que le point z_0 est un *point critique*
e $f(z)$, si, dans le voisinage de ce point, $f(z)$ est de

$$f(z) = \frac{\varphi_1(z)}{(z - z_0)^s},$$

t régulière et non nulle au point z_0, et où s est un
quelconque autre qu'un entier nul ou négatif. Si s est
$_0$ est un point critique algébrique.
s maintenant que $f(z)$ soit périodique de période 2π.
de modifier la représentation précédente de manière
raître la périodicité. Considérons un couple de points
njugués

$$\alpha \pm bi;$$

de ces points, nous aurons

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s},$$

holomorphe avec φ_1, car le quotient

$$\left[\frac{z - \alpha \mp bi}{\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)}\right]^s$$

aux points $\alpha \pm bi$.

ent simple d'ordre s. — Considérons un couple de
ques conjugués d'ordre s, $z = \alpha \pm bi$. On les ramène
naginaire, donc à la forme $\pm bi$, par le changement
α. Ainsi, soit $f(z)$ une fonction périodique admettant

les deux points critiques conjugués $\pm bi$. Au voisinage de ces points, $f(z)$ est de la forme (7), à savoir

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}.$$

Les deux fonctions régulières

$$\frac{\varphi(z) + \varphi(-z)}{2}, \qquad \frac{\varphi(z) - \varphi(-z)}{2 \sin z}$$

sont paires de période 2π et sont, par conséquent, des fonctions uniformes de $\cos z$. Elles sont développables par la formule de Taylor suivant les puissances de $\cos z - \cos bi$. Elles sont donc respectivement de la forme

$$A + (\cos bi - \cos z)\psi_1(\cos z), \qquad B + (\cos bi - \cos z)\psi_2(\cos z),$$

où ψ_1 et ψ_2 sont holomorphes au voisinage des points $z = \pm bi$. On en tire

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= A + B \sin z + (\cos bi - \cos z)(\psi_1 + \sin z\, \psi_2) \\ &= A + B \sin z + (\operatorname{ch} b - \cos z)\varphi_2(z),\end{aligned}$$

où φ_2 est régulière aux points $\pm bi$. Il vient ainsi finalement

$$(8) \qquad f(z) = \frac{A + B \sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} + \frac{\varphi_2(z)}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^{s-1}}.$$

Nous donnerons au premier terme de cette décomposition, qui est le terme principal, le nom d'*élément simple d'ordre s*. Il est relatif aux deux points $\pm bi$. Dans le cas général, les deux points conjugués sont $\alpha \pm bi$. On revient à ce cas par le changement de z en $z - \alpha$. Donc l'expression de l'*élément simple d'ordre s* pour les deux points conjugués $\alpha \pm bi$ est

$$\frac{A + B \sin(z - \alpha)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s}.$$

La formule (8) nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Au voisinage d'un point critique d'ordre s, $f(z)$ est la somme de l'élément simple d'ordre s et d'une fonction pour laquelle l'ordre du point critique est abaissé.

97. Valeur asymptotique des coefficients de Fourier. — Soit

ction périodique, holomorphe entre les deux droites
pposons d'abord qu'elle n'admette, sur ces deux
deux points critiques conjugués non équivalents,
eux-ci d'ordre s positif ou négatif. Les coefficients a_k
ier, dont nous nous proposons de trouver les valeurs
s pour $k = \infty$, sont définis par l'intégrale, effectuée
,

$$a_k + ib_k = \frac{1}{\pi}\int_{AB} f(z)\, e^{kzi}\, dz,$$

par AB un segment de cet axe de longueur 2π et de
lconque. Nous choisirons un segment AB contenant
sens étroit. Construisons le rectangle ABA′B′, qui a
segment AB et dont le côté opposé A′B′ se trouve
$y = b + \varepsilon$. Nous supposons que ε est un nombre
t assez petit pour que le rectangle ABA′B′ ne con-
e seul point critique $\alpha + bi$, que nous désignerons
ons ce point critique P au côté supérieur A′B′ du
une coupure verticale PQ et désignons par L le
tourne cette coupure dans le sens direct. La ligne
AB peut être remplacée par le contour AA′B′B en
e contourner le point critique P par le lacet L. Les
r les côtés verticaux AA′ et B′B du rectangle se
cause de la périodicité. L'intégrale (9) se réduit
grales sur A′B′ et sur L, c'est-à dire que l'on a

$$a_k + ib_k = \frac{1}{\pi}\int_{A'B'} + \frac{1}{\pi}\int_{L} f(z)\, e^{kzi}\, dz.$$

trouver la valeur asymptotique de cette expression
Le terme principal est l'intégrale sur L, car l'inté-
B′ est, $f(z)$ étant borné, de l'ordre de $|e^{kzi}| = e^{-k(b+\varepsilon)}$;
ent petite par rapport à l'intégrale sur L, comme le
e-ci va nous le montrer. Nous aurons donc asympto-

$$a_k + ib_k \sim \frac{1}{\pi}\int_{L} f(z)\, e^{kzi}\, dz.$$

ypothèse, $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z-\alpha)]^{s}}$$

et cette intégrale rentre dans celle dont nous avons déterminé la valeur asymptotique au début du Chapitre. Il vient, par la formule (5),

$$a_k + ib_k \sim 2\varphi(\alpha + bi)e^{k\alpha i}\frac{k^{s-1}e^{-kb}}{\Gamma(s)(2\,\mathrm{sh}\,b)^s}, \tag{11}$$

ce qui fournit les valeurs asymptotiques cherchées de a_k et de b_k.

Il y a lieu de remarquer que si l'élément simple principal de $f(z)$ au point $\alpha + bi$ est

$$\frac{A + B\sin(z - \alpha)}{[\mathrm{ch}\,b - \cos(z - \alpha)]^s},$$

on a, d'après la formule (8),

$$\varphi(z) = A + B\sin(z - \alpha) + [\mathrm{ch}\,b - \cos(z - \alpha)]\varphi_1(z);$$

d'où

$$\varphi(\alpha + bi) = A + iB\,\mathrm{sh}\,b.$$

Par hypothèse, l'un au moins des deux coefficients A ou B est différent de 0.

En second lieu, supposons que $f(z)$, holomorphe entre les droites $y = \pm b$, admette, sur ces droites, plusieurs couples de points critiques non équivalents et d'ordres déterminés; par exemple, les points

$$\alpha_1 + bi, \quad \alpha_2 + bi, \quad \ldots$$

des ordres $s_1, s_2, \ldots$ respectivement. Si l'un de ces ordres, par exemple s_1, est supérieur à tous les autres, je vais montrer que l'on connaîtra encore la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$ et qu'elle conservera la même forme que dans la formule (11).

En effet, la valeur de $a_k + ib_k$ est donnée par l'intégrale (9) sur AB. Celle-ci se ramène, comme ci-dessus, à l'intégrale sur A'B' et sur divers lacets $L_1, L_2, \ldots$ analogues à L et contournant les divers points critiques situés au-dessus de l'axe réel. Ces intégrales se calculent comme ci-dessus, mais c'est l'intégrale sur L_1 qui est prépondérante. La formule (11) subsiste donc, sauf qu'il faut y remplacer α par α_1, φ par φ_1 et s par l'ordre maximum s_1.

Passons maintenant au cas général. Supposons que la fonction périodique $f(z)$, holomorphe entre les deux droites $y = \pm b$,

ces droites, λ couples de points critiques de l'ordre
à savoir

$$\alpha_1 \pm bi, \qquad \alpha_2 \pm bi, \qquad \ldots, \qquad \alpha_\lambda \pm bi.$$

que l'élément simple principal relatif à $\alpha_\mu \pm bi$ soit

$$\frac{A_\mu + B_\mu \sin(z - \alpha_\mu)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha_\mu)]^s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

n abrégé,

$$A_\mu + iB_\mu \operatorname{sh} b = H_\mu.$$

raisonnements précédents, la valeur de $a_k + ib_k$ sera,
sauf une erreur d'ordre supérieur à $k^{s-1}e^{-kb}$,

$$a_k + ib_k \sim \left(\sum_{\mu=1}^{\lambda} H_\mu e^{k\alpha_\mu i} \right) \frac{2k^{s-1}e^{-kb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

formule ne donne la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$
mme

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda} H_\mu e^{k\alpha_\mu i}$$

lle ni infiniment petite. Dans ces cas d'exception,
un infiniment petit d'ordre plus élevé que $k^{s-1}e^{-kb}$
connaissons plus la valeur asymptotique.

e de l'approximation fournie par la série de Fourier. —
rs $f(z)$ une fonction périodique, holomorphe entre les
$\pm b$, n'ayant sur ces droites que des points critiques
erminés et dont l'ordre maximum est s. Soient S_n la
ourier d'ordre n de $f(z)$ et ρ_n l'approximation corres-
on a

$$\rho_n = \sum_{n+1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

ons établi, au numéro précédent, que $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ est un
petit de l'ordre de $k^{s-1}e^{-kb}$ ou d'ordre plus élevé. Il en
l'on peut assigner une constante h telle que l'on ait,
it n,

$$\rho_n < hn^{s-1}e^{-nb}.$$

Donc : *L'approximation par la série de Fourier est un infiniment petit, qui est au moins de l'ordre de*

$$n^{s-1}e^{-nb},$$

et il en résulte qu'il est exactement de cet ordre, car nous allons prouver que c'est celui de la meilleure approximation.

Soit, en effet, ρ_n la meilleure approximation. Nous avons d'abord $\rho_n < \rho'_n$. D'autre part, nous avons, par une formule connue (n° 9, 6°),

$$\rho_n \geq \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n+1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)}.$$

Si la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$ est donnée par la formule (11), elle est de l'ordre de $k^{s-1}e^{-kb}$ et l'on peut assigner une constante h_1 telle qu'on ait

$$\rho_n > h_1 n^{s-1}e^{-nb}.$$

Donc ρ_n est du même ordre que ρ'_n. Dans ce cas, la conclusion est immédiate.

Il n'y a de difficulté que quand $f(z)$ admet λ couples de points critiques du même ordre maximum s, car, dans ce cas, la formule (12), qui remplace la formule (11), ne donne pas nécessairement la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$.

On se tire d'affaire en déduisant de la formule (12) une formule asymptotique qui subsiste dans tous les cas.

A cet effet, formons le déterminant d'ordre λ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{\alpha_1 i} & e^{\alpha_2 i} & \ldots & e^{\alpha_\lambda i} \\ e^{2\alpha_1 i} & e^{2\alpha_2 i} & \ldots & e^{2\alpha_\lambda i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{(\lambda-1)\alpha_1 i} & e^{(\lambda-1)\alpha_2 i} & \ldots & e^{(\lambda-1)\alpha_\lambda i} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant n'est pas nul, car il est le produit de toutes les différences non nulles

$$e^{\alpha_1 i}-e^{\alpha_2 i},\quad e^{\alpha_1 i}-e^{\alpha_3 i},\quad \ldots$$

Nous désignerons les mineurs relatifs à la première colonne par $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{\lambda-1}$.

n des nombres 0, 1, 2, ..., $\lambda - 1$. Remplaçons k
ans la formule (12); nous en tirons, avec le même
roximation,

$$ {}_{k+\nu} + ib_{k+\nu} \sim \left(\sum_{\mu=1}^{\lambda} H_\mu e^{(k+\nu)\alpha_\mu i} \right) \frac{2k^{s-1} e^{-(k+\nu)b}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}. $$

ns cette relation par $\Delta_\nu e^{\nu b}$ et sommons par rapport à ν;

$$ \sum_{0}^{1} (a_{k+\nu} + ib_{k+\nu}) \Delta_\nu e^{\nu b} \sim \Delta H_1 e^{k\alpha_1 i} \frac{2k^{s-1} e^{-kb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}. $$

ormule que nous cherchions. Elle subsiste dans tous
me formule asymptotique, car le coefficient ΔH_1 est
zéro par hypothèse. Il résulte immédiatement de cette
$e^{\nu b}$ étant borné) que l'on peut assigner une constante
elle que l'on ait, quel que soit k,

$$ \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} |a_{k+\nu} + ib_{k+\nu}| > h_2 k^{s-1} e^{-kb}, $$

laçant k par $n+1$, ν par k et en changeant au besoin
h_2) telle qu'on ait, quel que soit n,

$$ \sum_{n+1}^{n+\lambda} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} > h_2 n^{s-1} e^{-nb}. $$

maintenant à la meilleure approximation ρ_n. Elle
tiori la condition

$$ \rho_n \geq \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{n+1}^{n+\lambda} (a_k^2 + b_k^2)}. $$

nt $p_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $q_k = 1$ dans la relation classique

$$ \dots + p_\lambda^2)(q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_\lambda^2) \geq (p_1 q_1 + \dots + p_\lambda q_\lambda)^2, $$

nt encore *a fortiori*, par ce qui précède,

$$ \rho_n > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sum_{n+1}^{n+\lambda} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} > \frac{h_2}{\sqrt{2\lambda}} n^{s-1} e^{-nb}. $$

Le théorème est donc démontré. L'approximation obtenue par la somme S_n de Fourier est de l'ordre de la meilleure approximation, et cet ordre est celui de $n^{s-1}e^{-nb}$ exactement.

99. Valeur asymptotique de l'approximation minimum de l'élément simple d'ordre s. — Établissons d'abord une formule préliminaire. Soit $P(x)$ un polynome de degré $n+1$ ayant toutes ses racines réelles et situées sur le segment $(-1, +1)$. Soit ensuite $f(x)$ une fonction analytique, régulière sur ce segment. Si l'on désigne par $R(x)$ le polynome de degré n qui se confond avec $f(x)$ aux $n+1$ points du segment qui sont racines de $P(x)$, on a

$$(14)\qquad f(x) - R(x) = \frac{P(x)}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)P(z)},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour C entourant le segment $(-1, +1)$ et ne contenant aucun point singulier de $f(z)$.

En effet, en remplaçant l'intégrale sur C par la somme des résidus de $f(z)$ au point x et aux $n+1$ points racines de $P(z)$, on retrouve $f(x) - P(x)$, où $P(x)$ est exprimé par la formule d'interpolation de Lagrange.

Nous allons transformer la formule (14). Remplaçons respectivement x par $\cos z$ et z par $\cos t$. Prenons comme contour C une ellipse de foyers $(-1, +1)$. La variable z décrit cette ellipse, quand t décrit le segment AB parallèle à l'axe réel, d'ordonnée positive et limité aux abscisses $-\pi$ et $+\pi$. L'aire interieure à C correspond alors à celle du rectangle compris entre AB et l'axe réel, donc $f(\cos t)$ sera supposée régulière dans ce rectangle.

Par ces substitutions, la formule (14) devient (le sens direct étant BA)

$$(15)\qquad f(\cos z) - R(\cos z) = \frac{P(\cos z)}{2\pi i}\int_{AB} \frac{f(\cos t)\sin t\,dt}{(\cos t - \cos z)P(\cos t)}.$$

Nous aurons à faire deux applications de cette formule, en choisissant respectivement pour P deux polynomes que nous avons déjà rencontrés et sur lesquels nous allons tout d'abord revenir.

Nous savons (n° 89) que, si l'on pose

$$T(z) = -2e^{nzi}\sin^2\frac{z - bi}{2},$$

$$T(z) = P_1(\cos z) + i \sin z \, P_2(\cos z),$$

sont deux polynomes de degrés n et $n-1$ respective-
ont toutes leurs racines sur le segment $(-1, +1)$. Ce
eux polynomes que nous aurons à introduire dans la
5). Avant de faire cette introduction, faisons encore
que préalable sur l'ordre de grandeur de ces polynomes
fini. Nous supposerons la variable $z = x + yi$ d'or-
positive. Alors on voit immédiatement que $T(z)$ est
petit de l'ordre de e^{-ny} et $T(-z)$ infiniment grand de
^{ny}. Donc les deux polynomes

$$z) = \frac{T(z)+T(-z)}{2}, \qquad P_2(\cos z) = \frac{T(z)-T(-z)}{2 \sin z}$$

nent grands de l'ordre de e^{ny}.

première application de la formule (15), nous allons
la valeur asymptotique de l'approximation minimum
t simple pair d'ordre s. A cette fin, nous substituons
mule les fonctions

$$f(\cos z) = \frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}, \qquad P = P_1(\cos z),$$

donne

$$\frac{1}{(\ldots - \cos z)^s} - R_1(\cos z)$$

$$= \frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \int_{AB} \frac{\sin t \, dt}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s (\cos t - \cos z) P_1(\cos t)}.$$

on $f(\cos t)$ n'a ici que le seul point critique $t = bi$.
ce point dans un rectangle ABA'B' de base AB et tel
née $b + \varepsilon$ du côté supérieur A'B' soit $< 2b$. Joignons
, que nous désignerons par P, au côté A'B' par une
ticale PQ; désignons par L le lacet qui contourne cette
les deux bords dans le sens direct. La ligne d'intégra-
it être remplacée par le contour AA'B'B, à condition
ner le point P par le lacet L. Les intégrales sur les
aux se détruisent. L'intégrale se réduit donc à celles
sur L.

s proposons de trouver la valeur asymptotique de l'in-
r n infini. L'intégrale sur A'B' est alors infiniment

petite de l'ordre de $e^{-n(b+\varepsilon)}$, car $P_1(\cos t)$ est de l'ordre de $e^{n(b+\varepsilon)}$, tandis que les autres facteurs sous le signe d'intégration sont finis. Cette intégrale est négligeable par rapport à celle sur L. C'est ce que le calcul de celle-ci va démontrer. Nous obtiendrons ainsi la formule asymptotique

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - R_1(\cos z)$$
$$\sim \frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \int_L \frac{\sin t \, dt}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s (\cos t - \cos z) P_1(\cos t)}.$$

Calculons donc la valeur asymptotique de cette intégrale. Nous avons

$$P_1(\cos t) = - e^{nti} \sin^2 \frac{t - bi}{2} - e^{-nti} \sin^2 \frac{t + bi}{2}.$$

De là résulte, sur l'axe imaginaire positif (donc sur L), le développement convergent :

$$\frac{1}{P_1(\cos t)} = - \frac{e^{nti}}{\sin^2 \frac{t + bi}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[- e^{2nti} \left(\frac{\sin \frac{t - bi}{2}}{\sin \frac{t + bi}{2}} \right)^2 \right]^\lambda.$$

Nous en concluons, en désignant par q un entier positif et par μ une fonction bornée sur L,

$$\frac{1}{P_1(\cos t)} = - \frac{e^{nti}}{\sin^2 \frac{t + bi}{2}} \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left[- e^{2nti} \left(\frac{\sin \frac{t - bi}{2}}{\sin \frac{t + bi}{2}} \right)^2 \right]^\lambda$$
$$+ \mu \, e^{(2q+1)nti} \left(\sin \frac{t - bi}{2} \right)^{2q}.$$

Donnons à q une valeur positive $> \frac{s}{2}$, substituons ce développement dans la dernière intégrale et désignons par μ_1 une fonction qui est bornée sur L en même temps que le facteur

$$\mu \frac{\left(\sin \frac{t - bi}{2} \right)^{2q}}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s};$$

nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - R_1(\cos z) \sim - \frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \sum_{\lambda=0}^{q-1} \int_L \frac{e^{(2\lambda+1)nti} \varphi_\lambda(t) \, dt}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s}$$

$$P_1(\cos z) \int$$

osé, en abrégé,

$$\varphi_\lambda(t) = (-1)^\lambda \frac{\sin t}{\cos t - \cos z} \frac{\left(\sin \frac{t - bi}{2}\right)^{2\lambda}}{\left(\sin \frac{t + bi}{2}\right)^{2\lambda+2}}.$$

$\varphi_\lambda(t)$ est holomorphe dans le cercle de centre bi et de aque terme de la somme Σ est asymptotiquement donne nule (5) du n° 93. Le terme complémentaire est de

$$\int_L |e^{-2q+1)nti}\,dt| = 2e^{-(2q+1)bn} \int_0^\infty e^{-(2q+1)x}\,dx,$$

ordre de $e^{-(2q+1)bn}$ et, par conséquent, negligeable. Le cipal est celui où $\lambda = 0$. Il vient donc, par la formule

[illegible]

ns encore

[illegible]

n définitive,

[illegible]

ons (n° 89) que le quotient

[illegible]

[illegible] fois son maximum absolu avec alternance de signes arie de o à 2π; nous voyons que notre relation asymp traine le théorème suivant :

ME I. — *La meilleure approximation trigonométrique infiniment grand de la fonction (z reel)*

$$\frac{1}{\operatorname{ch} b - \cos z}$$

Comme seconde application, nous allons déterminer la valeur asymptotique de l'élément simple impair d'ordre s. A cet effet, nous recommençons le calcul précédent, en conservant la même fonction

$$f(z) = \frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s},$$

mais en prenant, à la place de P, le polynome

$$P_2(\cos t) = \frac{T(t) - T(-t)}{2i \sin t}.$$

Le calcul est tout à fait analogue au précédent. Mais, comme $\sin t$ figure au dénominateur de l'expression de P_2, il s'introduit sous le signe d'intégration un facteur $\sin t$ en plus au numérateur, d'où un facteur $\operatorname{sh} b$ en moins au dénominateur du résultat. Il suffit d'indiquer ce résultat, qui est

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - R_2(\cos z) \sim \frac{P_2(\cos z)}{\operatorname{ch} b - \cos z} \frac{n^{s-1} e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Multiplions par $\sin z$; il vient

$$\frac{\sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} - \sin z \, R_2(\cos z) \sim \frac{\sin z \, P_2(\cos z)}{\operatorname{ch} b - \cos z} \frac{n^{s-1} e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Or, on a maintenant (n° 89)

$$\frac{\sin z \, P_2(\cos z)}{\operatorname{ch} b - \cos z} = \sin(nz - \varphi),$$

d'où le théorème suivant :

Théorème II. — *La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction (z réel)*

$$\frac{\sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}$$

a pour valeur asymptotique

$$\rho_n \sim \frac{n^{s-1} e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

En combinant les formules d'où découlent les deux théorèmes précédents, on obtient le théorème suivant, exactement comme dans le cas des singularités polaires (n° 83) :

E III. — *La meilleure approximation trigonomé-*
rdre n infiniment grand de la fonction (z réel)

$$\frac{A + B \sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}$$

eur asymptotique

$$\rho_n \infty \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}\, \frac{n^{s-1} e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^{s-1}}.$$

essions précédentes de ρ_n supposent $\Gamma(s)$ positif. st négatif, $\Gamma(s)$ peut l'être aussi. Dans ce cas, il faut dans les formules précédentes, $\Gamma(s)$ par sa valeur

ent comme dans le cas des singularités polaires, pour meilleure approximation est à celle de Fourier dans le

$$\frac{e^b}{2 \operatorname{sh} b} = \frac{1}{1 - e^{-2b}}$$

rt tend vers l'unité quand b croît indéfiniment.

leur asymptotique de l'approximation minimum dans le . — Soit $f(z)$ une fonction périodique régulière entre $y = \pm b$ et admettant plusieurs couples de points cri- dres déterminés sur ces deux droites.

nnaissons (n° 98) l'ordre de l'approximation minimum mais sa valeur asymptotique ne sera connue que s'il n'y l couple de points critiques distincts sur les droites, ou couple d'ordre s plus élevé que tous les autres. En effet, , on peut isoler le terme principal de $f(z)$ au voisinage ts critiques. C'est un élément simple d'ordre s, qui est nt dans la détermination de l'approximation. La valeur ue de l'approximation de $f(z)$ sera la même que pour rincipal. Elle sera donc donnée par les théorèmes pré-

ints singuliers logarithmiques. — On peut aussi trouver symptotique de la meilleure approximation de la fonc-

[illegible]

dans laquelle m est un entier positif et s un nombre réel quelconque.

Nous ne développerons pas la démonstration ; qu'il nous suffise de donner quelques indications sur la marche à suivre. Nous remarquons que cette fonction est, au signe près, la dérivée $m^{\text{ième}}$ par rapport à s de

$$\frac{A+B\sin z}{(\operatorname{ch} b-\cos z)^s}.$$

La détermination de la valeur asymptotique de la meilleure approximation de cette fonction dépend du calcul de l'intégrale (6) du n° 94 au lieu de celui de l'intégrale (5). De même que (6) se déduit de (5) par dérivation, de même cette valeur asymptotique se déduit par dérivation de la valeur de ρ_n fournie par le théorème III (n° 99). De là, le théorème suivant :

Si m est un entier positif, la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction

$$(A+B\sin z)\frac{[\log(\operatorname{ch} b-\cos z)]^m}{(\operatorname{ch} b-\cos z)^s}$$

a pour valeur asymptotique

$$\rho_n\sim\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}\,\frac{n^{s-1}(\log n)^m e^{-nb}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^{s+1}}.$$

Cependant, si s est un entier nul ou négatif $-p$, la formule doit se modifier de la même manière que la formule (6), qui doit se remplacer par (6'). Le théorème est alors le suivant :

La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction

$$(A+B\sin z)(\operatorname{ch} b-\cos z)^p[\log(\operatorname{ch} b-\cos z)]^m$$

a pour valeur asymptotique

$$\rho_n\sim\sqrt{A^2+B^2\operatorname{sh}^2 b}\,p!\,m(\log n)^{m-1}(\operatorname{sh} b)^{p+1}\frac{e^{-nb}}{n^{p+1}}.$$

Comme cas particuliers intéressants, signalons les deux suivants : Les meilleures approximations d'ordre n des fonctions

$$\log(\operatorname{ch} b-\cos z),\quad (\operatorname{ch} b-\cos z)\log(\operatorname{ch} b-\cos z)$$

ctivement pour valeurs asymptotiques :

$$\rho_n \sim \frac{e^{-nb}}{n \operatorname{sh} b}, \qquad \rho_n \sim \frac{e^{-nb}}{n^2}.$$

pproximation par polynome. — Les résultats précédents rment, par les substitutions du n° **91**, en d'autres équi- elatifs à la meilleure approximation par un polynome de lans l'intervalle $(-1, +1)$.

s cela, si a est une constante réelle > 1, on connaît les symptotiques de la meilleure approximation par un poly- degré n des fonctions

$$\log(a-x), \quad (a-x)\log(a-x)$$

généralement, de la fonction (m entier, nul ou positif)

$$\frac{[\log(a-x)]^m}{(a-x)^s}.$$

ultat a été donné, pour $m = 0$ et $m = 1$, par M. Bernstein. le géomètre n'a étudié que la représentation par polynome. de la représentation trigonométrique nous a conduits à des plus générales et plus élégantes; mais, pour les établir, vions qu'une simple adaptation à faire des procédés analy- naginés par M. Bernstein.

106. Théorème III. — *Si une fonction périodique de x réel, $f(x)$, admet, quel que soit n entier, une représentation trigonométrique T_n, d'ordre n, avec une approximation*

$$\rho_n < he^{-n\psi(n)},$$

où h est une constante et $\psi(n)$ une fonction non décroissante de n et infinie avec n; alors $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan $z = x + yi$ et, quelque petit que soit ε positif donné, on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de y (qui dépend de ε),

$$(7) \qquad |f(x \pm yi)| < e^{|y|\varphi[(1+\varepsilon)|y|]} \qquad (y > 0),$$

où φ est la fonction inverse de ψ.

D'abord $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan, en vertu du théorème IV du Chapitre VI (où l'on peut prendre b aussi grand que l'on veut).

Considérons le développement en série, pour x réel,

$$(8) \qquad f(x) = T_2 + (T_3 - T_2) + \ldots + (T_n - T_{n-1}) + \ldots;$$

l'expression trigonométrique d'ordre n

$$T_n - T_{n-1} = (f - T_{n-1}) - (f - T_n)$$

est de module inférieur à

$$2he^{-(n-1)\psi(n-1)}$$

et, par conséquent, sa dérivée d'ordre k est de module inférieur à

$$2hn^k e^{-(n-1)\psi(n-1)}.$$

Il s'ensuit que la série (8) peut être dérivée k fois terme à terme, car la série dérivée converge uniformément ; et l'on en conclut

$$|f^{(k)}(x)| < 2h\sum_2^\infty n^k e^{-(n-1)\psi(n-1)}$$

$$< 2h\sum_2^\infty \int_0^1 dt\,(n+1-t)^k e^{-(n-2+t)\psi(n-2+t)}$$

Substituons ces bornes dans le développement

$$f(x+yi) = \sum_k \frac{(yi)^k}{k!} f^{(k)}(x);$$

il vient

$$|f(x+yi)| < 2h \int_0^\infty dt\, e^{-t\psi(t)} \sum_k \frac{[(t+2)y]^k}{k!}$$

$$< 2h \int_0^\infty dt\, e^{-t\psi(t)} e^{(t+2)y}$$

$$< 2he^{2y} \int_0^\infty e^{t[y-\psi(t)]}dt.$$

Faisons la décomposition en deux intégrales

$$\int_0^\infty e^{t(y-\psi)}dt = \int_0^{\varphi(y+\varepsilon)} + \int_{\varphi(y+\varepsilon)}^\infty e^{t(y-\psi)}dt.$$

Comme φ est l'inverse de ψ, on a

$$\psi[\varphi(y+\varepsilon)] = y+\varepsilon;$$

la seconde intégrale est inférieure à

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}dt = \frac{1}{\varepsilon};$$

la première intégrale est inférieure à

$$\int_0^{\varphi(y+\varepsilon)} e^{ty}dt < \frac{1}{y} e^{y\varphi(y+\varepsilon)}.$$

Il vient donc, quel que soit y positif,

$$|f(x+yi)| < 2he^{2y}\left[\frac{1}{y} e^{y\varphi(y+\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon}\right].$$

A partir d'une valeur suffisamment grande de y, on a, quelque petit que soit ε donné,

$$e^{y\varphi(y+\varepsilon)} > \frac{y}{\varepsilon},$$

et dès lors

$$|f(x+yi)| < \frac{4h}{y} e^{y[\varphi(y+\varepsilon)+2]}.$$

La formule de l'énoncé est la conséquence immédiate de celle-ci.

La comparaison des théorèmes précédents conduit à des conséquences intéressantes sur l'ordre de la meilleure approximation.

107. Théorème IV. — *Soit $f(z)$ une fonction périodique, holomorphe dans tout le plan. Désignons par $\varphi(y)$ la plus petite fonction non décroissante de y positif qui satisfait à la condition*

$$|f(x+yi)| < e^{y\varphi(y)},$$

et supposons que $\varphi(y)$ croisse à l'infini avec y. Enfin soit ψ la fonction inverse de φ. Alors, quelque petit que soit ε positif donné, la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n de $f(x)$ sur l'axe réel satisfait définitivement à la condition

$$\rho_n < e^{-(1-\varepsilon)n\psi(n)},$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de n, tandis qu'elle ne vérifie jamais définitivement la condition

$$\rho_n < e^{-(1+\varepsilon)n\psi(n+2)}.$$

La première condition a été établie précédemment et rentre dans la formule (6). Nous allons montrer que la seconde est la conséquence du théorème précédent.

Si la dernière inégalité avait définitivement lieu, on pourrait assigner une constante h, telle que l'on ait, quel que soit y,

$$\rho_n < he^{-(1+\varepsilon)n\psi(n+2)}.$$

Mais la fonction inverse de

$$(1+\varepsilon)\psi(n+2) = y$$

est

$$n = \varphi\left(\frac{y}{1+\varepsilon}\right) - 2.$$

On conclurait donc de l'inégalité précédente, par le théorème III, que l'on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de y,

$$|f(x+yi)| < e^{y\varphi\left(\frac{y}{1+\varepsilon}\right)}.$$

Or ceci est contraire à la définition de φ, car φ pourrait être remplacé par une fonction plus petite $\varphi\left(\frac{y}{1+\varepsilon}\right)$.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.